Beiträge zu einer Theorie

des

Bevölkerungswachstums

mit einer Anwendung auf Sozialversicherungskassen

Inauguraldissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Ernst Zwinggi

von Neudorf, Luzern

Bern — Gedruckt bei Stämpfli & Cie. — 1929

Die gleiche Abhandlung erscheint in den „Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker“
Heft 24 — 1929

Beiträge zu einer Theorie

des

Bevölkerungswachstums

mit einer Anwendung auf Sozialversicherungskassen

Inauguraldissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Ernst Zwinggi

von Neudorf, Luzern

Bern — Gedruckt bei Stämpfli & Cie. — 1929

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn
Prof. Dr. Chr. Moser angenommen
Bern, den 1. März 1929 Der Dekan: Prof. S. Mauderli

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen lieben Eltern gewidmet

Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle den Herren Prof. Moser, Prof. Crelier, Prof. Gonseth und Prof. Gruner für die mir während des Studiums erwiesene Unterstützung und Anregung meinen besten Dank auszusprechen.

Zu ganz besonderem Dank bin ich Herrn Prof. Moser und Herrn Dr. Friedli verpflichtet. Durch ihre stete Unterstützung und ihre reiche Anregung konnte die vorliegende Arbeit entstehen und durchgeführt werden.

Ernst Zwinggi.

Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums mit einer Anwendung auf Sozialversicherungskassen.

Von **E. Zwinggi**, Bern.

Einleitung.

In der mathematischen Bevölkerungstheorie haben zwei Probleme von jeher das besondere Interesse des Statistikers in Anspruch genommen: die analytische Erfassung der Vermehrung und des Sterbens. Soll das erste Problem Auskunft geben über die Fortpflanzung des Menschengeschlechtes, so möchte man vom zweiten wissen, nach welchen Gesetzen die Menschen dem Tode verfallen.

Wie es dem menschlichen Geiste zu eigen ist, alles Naturgeschehen in starren Regeln zu erfassen, so hat er auch versucht, Leben und Sterben in eine mathematische Formel zu bringen, er suchte nach einem Gesetze des Sterbens. Das Makehamsche Gesetz, um nur dieses zu nennen, gibt in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung die Zahl der Überlebenden wieder, wenn eine grosse Anzahl gleichaltriger, erwachsener Elemente dem Sterben ausgesetzt wird. Durch geeignete Methoden auf Grund einer zuverlässigen Statistik ist es möglich geworden, den Einfluss einzelner Krankheiten mathematisch zu erfassen, ebenso kann der Fortschritt der

Lebensverbesserung zahlenmässig nachgewiesen werden. Zusammenfassend dürfen wir behaupten, dass wir heutzutage über die Sterblichkeitsverhältnisse der einzelnen Kulturstaaten gut unterrichtet sind.

Die zweite Frage gilt dem Gesetz der Bevölkerungsvermehrung. Können wir aus den Beobachtungen der vergangenen Jahrzehnte auf die Zukunft schliessen? Diese Fragestellung ist identisch mit der nach einem Gesetz des Bevölkerungswachstums. Gehorcht das Wachstum einem Gesetze, oder ist es einzig bestimmt durch die momentanen Umstände? Wollte man die Frage kurzweg mit ja beantworten, so müsste die Aufstellung des Gesetzes an der Unmöglichkeit der analytischen Erfassung aller eine Wachstumsänderung bedingenden Ursachen scheitern. Wir kennen diese Ursachen nicht alle, wissen nicht zum vorneherein, wann sie eintreffen. Aber ebenso unrichtig wäre, die Existenz eines Normalgesetzes, dem zu folgen alle normalen Bevölkerungen bestrebt sind, zu leugnen.

Weiterhin muss man sich fragen, ob es denn überhaupt notwendig sei, zu wissen, wie sich eine Bevölkerung in der Zukunft entwickelt, oder ob das Interesse bloss wissenschaftlicher Natur sei und von keiner praktischen Bedeutung. Die vergangenen Kriegs- und Krisenjahre haben die Einführung der sozialen Versicherungen beschleunigt und zum Teil verwirklicht. Viele Staaten haben die obligatorische Altersversicherung eingeführt, andere sind daran, es zu tun. Dadurch ist der Mathematiker gezwungen worden, um die künftigen finanziellen Belastungen zu berechnen, sich über die Fortentwicklung seines Volkes Rechenschaft zu geben. Er musste nach einem «Wachstumsgesetz» suchen, das den mutmasslichen künftigen Verlauf am besten wiederzugeben vermag.

Wir sagten vorhin: nach einem Wachstumsgesetz. Wie das Makehamsche Gesetz nur den Normalfall des Absterbens darstellt, wenn vom Kindesalter abgesehen wird, so wird es auch nicht nur *ein* Wachstumsgesetz geben. Als das richtige werden wir dasjenige anzusehen haben, das für die betreffende Bevölkerung am genauesten mit der Beobachtung übereinstimmt.

Die Wachstumsgesetze.

Ein kurzer Rückblick auf die Entstehungsgeschichte der Vermehrungsgesetze lässt erkennen, dass wir hauptsächlich zwischen dem Anwachsen in geometrischer Progression und dem in nicht geometrischer Progression zu unterscheiden haben. Als historisch älteres sei jenes vorweggenommen.

Als erster, der auf den geometrischen Verlauf des Bevölkerungswachstums stiess, ist *Euler* (1*) zu nennen. Auf Grund einfacher Annahmen über Geburt und Tod konnte er eine Reihenentwicklung aufstellen, von der gezeigt werden kann, dass sie in eine geometrische ausläuft.

Dem Theologen *Süssmilch* (2*) berechnete er für sein Werk Tabellen, denen das Wachstum einer Bevölkerung sowie die Verdopplungszeiten bei verschiedener Wachstumsgeschwindigkeit entnommen werden können. Besonders die Verdopplungszeiten, die sich als zeitlich konstant ergaben, spielten dabei eine wichtige Rolle.

Eine erste Kritik am geometrischen Wachstum übte der englische Philosoph *Malthus* (3*) aus. Er legte dar, wie die Erdbevölkerung unmöglich dauernd in geome-

---

Anmerkung. Die Zahlen, wie z. B. (23*), bedeuten die Literaturnachweise.

trischer Progression anwachsen könne, indem er diesem Verlauf die bloss arithmetische Zunahme der Lebensmittel gegenüberstellte. Von Zeit zu Zeit müssen sich der Entwicklung Hindernisse entgegenstellen, die einen langsamern Verlauf erzwingen.

Den bisherigen genannten Versuchen wohnte das Bestreben inne, die Grösse einer Bevölkerung im voraus zu berechnen, die Formeln waren dem Wesen nach Extrapolationsformeln. Mit zunehmender Sicherheit der Statistik wuchs das Bedürfnis, für eine vergangene Periode den Verlauf analytisch darzustellen. Mit andern Worten, man suchte nach einer passenden Interpolationsformel. Meistens waren die Zeitspannen kurz, und der Stand der Bevölkerung liess sich mit genügender Genauigkeit durch eine Exponentiallinie oder eine Parabel höherer Ordnung darstellen. Beinahe für alle Bevölkerungen gelang es, die Wachstumskurve durch einen entsprechenden Parabelbogen zu approximieren (4*). So gute Dienste dieses Verfahren für die Interpolation zu leisten vermag, so unbrauchbar ist es für die Extrapolation. Exponentiallinie wie Parabel wachsen mit der Zeit rasch an und vermögen den Stand der Bevölkerung bald nicht mehr darzustellen.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurden die ersten Bestrebungen laut zur Einführung der Sozialversicherung, und man schickte sich an, die daraus voraussichtlich erwachsenden finanziellen Belastungen zu berechnen. Die damaligen statistischen Angaben liessen erkennen, dass sich der Altersaufbau nur wenig verändert (5*), und daraus schloss man durch eine mathematische Ableitung (6*) auf den exponentiellen Verlauf der Wachstumskurve. Alle grundlegenden Arbeiten von *Bortkiewicz* (6*), *Kaan* (7*) gingen von diesen Annahmen aus, selbst neuere Arbeiten (8*) haben diese Grundlagen ge-

wählt. Das Hauptergebnis dieser Theorie sei hier vorweggenommen: vom Zeitpunkt der vollen Wirksamkeit der Versicherungsinstitution an bleibt die Umlageprämie für irgendeine Versicherungsart konstant. (Die mathematische Ableitung findet sich in Kap. III, § 2.)

Eine kritische Betrachtung dieser Theorie muss ohne weiteres ergeben, dass der exponentielle Verlauf für kurze Zeiträume zutreffen mag, dass aber nie ein stationärer Zustand eintreten kann. Daher wächst die Bevölkerung ins Unermessliche an. Die Grundlagen zur Kostenberechnung in der Sozialversicherung sollten aber für längere Zeit Gültigkeit haben, so dass aus den genannten Gründen konstante Alterszusammensetzung und geometrisches Wachstum abzulehnen sind (9*).

Nach diesen nur kurz berührten Verhältnissen beim geometrischen Wachstum werden wir eingehender auf die Arbeiten einzutreten haben, die als Grundlage zu unsern Untersuchungen gedient haben. Angeregt durch die Ideen von Malthus, versuchte der Statistiker *Quetelet* (10*) eine Theorie des Bevölkerungswachstums aufzustellen. Nach eingehenden Untersuchungen gelangte er zum Ergebnis, dass sich die Theorie der Bevölkerungsvermehrung auf zwei Prinzipien zurückführen lasse:

1. die Bevölkerung hat die Tendenz, nach einer geometrischen Progression anzuwachsen;
2. der Widerstand oder die Summe aller Hindernisse gegen ihre Entwicklung wächst bei gleichbleibenden Bedingungen wie das Quadrat der Geschwindigkeit, mit der die Bevölkerung anzuwachsen bestrebt ist.

Ferner legt er dar, wie die Bevölkerung nach einem stationären Zustand hintendiert. Quetelet unterlässt aber, eine mathematische Formulierung zu geben, wogegen sich wahrscheinlich auf seine Anregung hin der

belgische Mathematiker *Verhulst* in drei Arbeiten (11*) mit der Frage eingehend beschäftigt. Indem er die Bevölkerungszunahme dp im Zeitmoment dt proportional der momentanen Bevölkerung, vermindert um eine Funktion der Bevölkerung, setzt, also

$$\frac{dp}{dt} = m \cdot p - f(p),$$

gelangt er nach gewissen vereinfachenden Annahmen über $f(p)$ zu verschiedenen Wachstumsformeln. Allen diesen Beziehungen ist aber die Eigenschaft gemein, dass die Bevölkerung gegen einen endlichen Grenzwert hintendiert. Als Funktion $f(p)$ wird zuerst angenommen $f(p) = n \cdot p^2$, sodann findet er als Lösung der Differentialgleichung:

$$p = \frac{m \cdot p' \cdot e^{mt}}{n \cdot p' \cdot e^{mt} + m - n \cdot p'},$$

wo p' die Bevölkerung bei $t = 0$ ist; die obere Schranke ist gegeben bei $t = \infty$ durch $\frac{m}{n}$. Bei andern Annahmen über $f(p)$ stösst er auf andere Formeln, die andere obere Grenzen ergeben. Anhand der Volkszählungen für Frankreich 1817—1831, Belgien 1815—1833, Grafschaft Essex 1811—1831 kann er sehr gute Übereinstimmung mit seiner Formel nachweisen.

In seiner zweiten Arbeit geht Verhulst vom Begriffe der «Normalbevölkerung» aus. Bei freier Entwicklung hat die Bevölkerung die Tendenz, sich in geometrischer Progression zu vermehren. Angenommen, sie habe sich so vermehrt bis zu einem Punkte, wo sich die Hindernisse geltend zu machen beginnen, und habe dabei die Grösse b erreicht; b nennt er die Normalbevölkerung. Als Differentialgleichung für das Wachstum findet er dann:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = l - f(p-b).$$

Ohne sich dessen bewusst zu sein, ist Verhulst vom Begriffe der Intensität ausgegangen. Durch den Ansatz $f(p-b) = n(p-b)$ und die abkürzende Setzung $m = l + nb$ ist auch:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = m - n \cdot p \qquad (\alpha)$$

und er findet eine Kurve von analoger Form wie vorher, die er in Anlehnung an den damaligen Gebrauch *logistische Kurve* nennt. Ferner werden die hauptsächlichsten mathematischen Eigenschaften entwickelt und eine Methode der Konstantenbestimmung aus drei äquidistanten Punkten gegeben.

Allein die Untersuchungen fanden nicht die Anerkennung, die sie verdienten, und gerieten in Vergessenheit. Erst den letzten Jahren blieb die Neuentdeckung vorbehalten.

Doch seien zunächst die mathematischen Eigenschaften der logistischen Kurve, wie wir sie nun stets nennen werden, untersucht. Die Differentialgleichung (α) lässt sich auch schreiben als:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{y}{L}\right),$$

wo y die Bevölkerung darstellt und α wie L Konstante sind. Als Lösung gewinnt man:

$$y^{(t)} = \frac{L}{1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}}.$$

β ist die Integrationskonstante und von der Dimension einer Zeit. Bei $t = \infty$ erreicht y den obern Grenzwert

asymptotisch und verschwindet bei $t = -\infty$. In dem Punkte $t = \beta$ hat y die halbe maximale Ordinate $L/2$ und geht durch den Wendepunkt. Dabei ist die Kurve bezüglich des Inflexionspunktes symmetrisch, was in mathematischer Formulierung heisst:

$$y^{(\beta+h)} = L - y^{(\beta-h)}.$$

Über den Verlauf orientiert Figur 1.

Wie schon oft eine Entdeckung auch einem andern Gebiete von grösstem Nutzen sein kann, zeigt nun die Weiterentwicklung der Theorie der logistischen Kurve. Die amerikanischen Biologen *Robertson*, *Reed* und *Holland* beschäftigten sich mit der mathematischen Darstellung von Wachstumsvorgängen [Gewichtszunahme weisser Ratten (12*), Längenwachstum von Aprikosenschossen (13*)], und sie zeigten dabei, wie sich die in der Chemie bekannten autokatalytischen Vorgänge sinngemäss auch auf biologische Probleme übertragen lassen. Es war das Verdienst der beiden Biologen *Pearl* und *Reed*, nachzuweisen, dass die dabei verwendeten Kurven auch auf die Vermehrung ganzer Gesamtheiten angewandt werden können (14*). Auf Grund der Bevölkerungsbewegung der Vereinigten Staaten von Nordamerika im 19. Jahrhundert gelang ihnen, die ausgezeichnete Übereinstimmung von Beobachtung und Berechnung nachzuweisen. Dabei waren den Autoren die Arbeiten von Verhulst unbekannt, und sie wurden erst durch eine Publikation des Neuenburger Professors *L. G. du Pasquier* (15*) auf jene Veröffentlichungen aufmerksam, nachdem allerdings schon der Franzose *Mansion* in seinen Leçons sur le calcul des probabilités im Jahre 1916 auf die Arbeiten hingewiesen hatte. (Siehe unter 16*.)

Im Jahre 1925 wies der Engländer *Yule* (17*) nach, dass die von Pearl und Reed benutzte Kurve auch

für die Bevölkerungen von England und Wales gut stimmt. Dabei geht er auch ziemlich eingehend auf die Arbeiten von Verhulst ein. (In den bisherigen Darstellungen sind wir hauptsächlich seinen Ausführungen gefolgt.) Ferner wies *E. Krummeich* (16*) in einer im Jahre 1927 dem Institut de Statistique de la France vorgelegten Dissertation nach, dass sich auch die Bevölkerung von Frankreich im Zeitraume 1801—1911 ausserordentlich gut durch die Verhulstsche Kurve darstellen lässt.

Die bald einsetzende Kritik wies vor allem darauf hin, dass das logistische Wachstumsgesetz nicht so allgemeiner Natur sein könne, wie man anfangs angenommen hatte, sondern nur den Normalfall darstelle (vgl. 18*). *Gumbel* (19*) lehnt sogar den Gedanken der Möglichkeit eines Wachstumsgesetzes ab und sieht in der Formel wie in allen andern nur den Interpolationscharakter.

Wir haben schon eingangs darauf hingewiesen, dass es nicht nur *ein* Vermehrungsgesetz geben könne, und auch das Verhulstsche darf nur als Normalfall eines solchen angesehen werden. In Wirklichkeit wird das Wachstum einen viel komplizierteren Verlauf nehmen und sich nicht durch so einfache «Gesetze» darstellen lassen. Die grosse Bedeutung, die einem solchen Normalgesetz zukommt, wird jedoch dadurch nicht geschmälert, um so mehr, als sich in der Praxis gute Übereinstimmung nachweisen lässt.

Auf ein Wachstumsgesetz, wie es tatsächlichen Berechnungen zugrunde gelegt wurde, sei hier kurz hingewiesen. Durch die Volksabstimmung vom 6. Dezember 1925 wurden die gesetzlichen Grundlagen zur Einführung der Altersversicherung in der Schweiz geschaffen, und das Amt für Sozialversicherung beauf-

tragt, die nötigen Berechnungen vorzunehmen. Die statistischen Grundlagen liessen erkennen, dass ungefähr im Jahre 2000 der stationäre Zustand erreicht sein dürfte bei einer Bevölkerungszahl von rund 5 Millionen. Auf Grund dieser obern Schranke konnte dann auch ein Vermehrungsgesetz gefunden werden (20*).

Die Problemstellung.

Zur Ermittlung der Grössen, die über die Bevölkerungsbewegung Auskunft geben, stehen grundsätzlich zwei Wege offen. Einmal betrachten wir die zahlenmässig gegebene Grösse einer Bevölkerung als das Primärgegebene und suchen daraus auf den Verlauf der Geburtenzahlen zu schliessen. Oder es können die Geburtenzahlen bekannt sein, und aus diesen muss die Grösse der Bevölkerung berechnet werden. In beiden Fällen müssen die Sterblichkeitsverhältnisse bekannt sein und von Wanderungen abgesehen werden.

In unsern Untersuchungen gehen wir den zweiten Weg. Dabei werden in einem ersten Kapitel die Masszahlen zur Messung der Bevölkerungsbewegung entwickelt. Um die Gültigkeit der Ergebnisse zu erweitern, gehen wir vom Begriffe der Gesamtheit aus, von der die Zugangs- oder die Erneuerungsfunktion bekannt sein soll. Im zweiten Kapitel verfügen wir sodann über diese Funktion im Sinne der Verhulstschen Theorie. Das dritte Kapitel bringt die Anwendung der Ergebnisse des zweiten auf die Probleme der Sozialversicherung. Das vierte endlich ist einem schematischen Beispiel gewidmet.

Kapitel I.

Allgemeine Beziehungen.

§ 1.

Das Wachstum einer Personengesamtheit. Die Zugangsfunktion. Die resultierende Gesamtheit. Einschränkungen.

Vorgelegt ist eine Personengesamtheit, die alle Alter von x_1 bis x_2 stetig umfassen soll. Sie sei bezeichnet mit $B\binom{x_2}{x_1}$. Durch irgendwelche Ursachen scheiden die Elemente im Laufe der Zeit aus, und sie werden durch neue ersetzt. Die Gesamtheit B ist also vom Typus der sich erneuernden Gesamtheit. Dabei braucht aber die Gesamtzahl aller Mitglieder nicht konstant zu sein. Greifen wir alle die heraus, die im Alter x_i eintraten: ihre Zahl sei $L_{x_i}^{(t)}$. Ferner sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein $x_i$jähriger im Alter x der Gesamtheit noch angehört ${}_{x-x_i}p_{x_i}$. Endlich bezeichne $L_x^{(t)}$ die Zahl der $x$jährigen im Zeitpunkte t. Die Grössen ${}_{x-x_i}p_{x_i}$, $L_x^{(t)}$ und $L_{x_i}^{(t)}$ sind Funktionen der Zeit. Wir legen fest, dass das Eintrittsalter von x_1 bis x_2 stetig variieren kann, verteilen also damit die Eintretenden auf das Altersintervall x_1 bis x_2.

Die Zahl $L_x^{(t)}$ wird nun gegeben sein durch den folgenden Integralausdruck:

$$L_x^{(t)} = \int_{x_i=x_1}^{x_i=x_2} L_{x_i}^{(t-x+x_i)} \cdot {}_{x-x_i}p_{x_i} \cdot dx_i \qquad (1)$$

denn die Zahl der $x$jährigen wird gebildet durch die Summe aller Elemente, die vor $t-x+x_i$ Jahren eintraten und $x-x_i$ Jahre der Gesamtheit angehörten. Um die volle Gesamtheit zu erfassen, werden wir zu bilden haben:

$$B\binom{x_2}{x_1} = \int_{x=x_1}^{x=x_2} L_x^{(t)} \cdot dx \qquad (2)$$

oder auch

$$B\binom{x_2}{x_1} = \int_{x=x_1}^{x=x_2} dx \int_{x_i=x_1}^{x_i=x_2} L_{x_i}^{(t-x+x_i)} \cdot {}_{x-x_i}p_{x_i} \cdot dx_i \qquad (3)$$

Es soll nun der Begriff der Gesamtheit etwas weiter gefasst werden. Wir denken uns eine Gesamtheit $B\binom{x_n}{x_0}$, die $B\binom{x_2}{x_1}$ vollständig in sich schliesst. In der ersten Gesamtheit seien die Eintritte verteilt auf das Intervall x_0 bis x_n. Die Elemente der zweiten Gesamtheit lassen sich dann zusammengesetzt denken aus 2 Gruppen. Einmal aus den Elementen, die im Alter $x_1 < x < x_2$ in die Gesamtheit $B\binom{x_2}{x_1}$ eintraten, und dann aus denen, deren Alter die Grenze x_1 überschreitet und die automatisch einrücken. Dadurch muss sich aber auch der Charakter von p ändern; ${}_{x-x_i}p_{x_i}$ bedeutet nun die Wahrscheinlichkeit, dem Bestande $B\binom{x_n}{x_0}$ nach $x-x_i$ Jahren noch anzugehören. Offenbar verteilen sich dann die Eintritte auf das Intervall x_0 bis x_2 (die höhern Alter fallen ausser Betracht), so dass sich (3) modifiziert zu:

$$B\binom{x_2}{x_1} = \int_{x=x_1}^{x=x_2} dx \int_{x_i=x_0}^{x_i=x_2} L_{x_i}^{(t-x+x_i)} \cdot {}_{x-x_i}p_{x_i} \cdot dx_i \qquad (4)$$

Für unsere Zwecke, wie auch der Einfachheit halber wird die Allgemeinheit der Beziehung (4) wie folgt eingeschränkt:

a) alle Eintritte geschehen beim gleichen Alter x_0,

b) das Ausscheiden erfolgt einzig durch Tod, die Ausscheideordnung ist demnach durch die Überlebensordnung zu ersetzen.

Mit diesen Vorbehalten lautet (4):

$$B\binom{x_2}{x_1} = \int_{x=x_1}^{x=x_2} L_{x_0}^{(t-x+x_0)} \cdot {}_{x-x_0}p_{x_0} \cdot dx \qquad (5)$$

Kennzeichnend für den Verlauf von B werden die beiden Grössen $L_{x_0}^{(t)}$ und ${}_{x-x_0}p_{x_0}$ sein, die beide Funktionen der Zeit sind. Die beiden Ausdrücke seien deshalb einer kurzen Betrachtung unterworfen.

Bedeutet $f(x)$ die Zahl der $x$jährigen, die aus $f(0)$ gleichaltrigen Elementen hervorgegangen sind, so gilt die allgemeine Beziehung:

$${}_np_x = \frac{f(x+n)}{f(x)}$$

und demnach

$${}_{x-x_0}p_{x_0} = \frac{f(x)}{f(x_0)} \qquad (6)$$

Aus der Theorie der Intensitätsfunktionen gelten ferner die folgenden Relationen:

$$\mu_x = \frac{-df(x)}{f(x)} \frac{1}{dx} = \frac{-f'(x)}{f(x)} = \frac{-d\,ln\,f(x)}{dx},$$

woraus umgekehrt bei gegebenem μ durch Integration auf die Überlebensordnung geschlossen werden kann durch:

$$f(x) = f(a) \cdot e^{-\int_a^x \mu_z \cdot dz}$$

Da die Überlebensordnung zeitlichen Verschiebungen ausgesetzt ist, wird, wie schon angedeutet, die Überlebenswahrscheinlichkeit zeitlich nicht konstant sein. Die vergangenen Jahrzehnte haben eine stete Lebensverbesserung gezeitigt, die sich in Zukunft noch fortsetzen wird. In welchem Masse diese Veränderung fortschreiten wird, kann nicht vorausgesagt werden; ärztliche Kunst und hygienische Fortschritte werden da massgebend sein. Um jedoch unsere Berechnungen überhaupt zu ermöglichen, müssen wir eine unveränderte Absterbeordnung für die Zukunft voraussetzen. Innerhalb welcher Grenzen die dadurch bedingte Ungenauigkeit liegt, werden künftige Untersuchungen zu zeigen haben.

Von grösserer Wichtigkeit wird jedoch die Funktion $L_{x_0}^{(t)}$ sein, die wir in Zukunft stets *Zugangsfunktion* nennen werden.

Genau wie wir die Sterblichkeitsintensität μ_x definierten, so bestimmt sich hier die Zugangsintensität zu:

$$\sigma(t) = \pm \frac{1}{L_{x_0}^{(t)}} \frac{dL_{x_0}^{(t)}}{dt} = \pm \frac{L_{x_0}'^{(t)}}{L_{x_0}^{(t)}} = \pm \frac{d\ ln\ L_{x_0}^{(t)}}{dt} \quad (7)$$

Das positive Vorzeichen ist bei steigender Zugangsfunktion zu nehmen; wir beschränken uns auf diesen Fall.

Jede Schwankung der Zugangsfunktion überträgt sich auch auf die einzelnen Jahrgänge und damit

auch auf die ganze Gesamtheit. Dabei werden die Schwingungen im hohen Alter weniger bemerkbar sein als in den jüngern, denn sie werden von der Sterblichkeitskraft im Laufe der Zeit gedämpft. Der Bestand, der die höchsten Alter umfasst, ist demgemäss geringeren Schwankungen unterworfen als der Bestand der jungen Personen. Wir dürfen aber nicht übersehen, dass selbst an sich geringe Schwingungen in der Zugangsfunktion dennoch bedeutende in der Gesamtheit auslösen können. Es liegt aber nicht im Ziele unserer Untersuchungen, diese Verhältnisse eingehender zu untersuchen; auf einen besonderen Umstand sei jedoch hingewiesen.

In der Darstellung (5) ist stillschweigend angenommen worden, dass die Zugänge stets im gleichen Alter mindestens $x—x_0$ Jahre lang geschahen. Mit andern Worten haben wir von der Anfangsgeneration abgesehen oder betrachten den Bestand im Zeitpunkt der vollen Wirksamkeit.

Ein anderer Fall wäre jedoch der, dass eine Anfangsgeneration vorhanden war, und für die Zukunft das Zugangsgesetz Gültigkeit haben soll. Bei diesen Annahmen wird die Gesamtheit Schwankungen unterworfen sein, die durch das Aussterben der Anfangsgeneration hervorgerufen sind. Die Darstellungen in den beiden schon genannten Arbeiten von Dr. *Friedli* lassen die Schwingungserscheinungen gegen den Beharrungszustand hin deutlich erkennen.

Eine letzte Modifikation wäre noch, die Grösse der Gesamtheit zeitlich invariant zu lassen. Die Zugangsfunktion ist dann einzig bestimmt durch die Ausscheidefunktion. Dieser Fall ist eingehend von Prof. *Moser* untersucht worden, und wir verweisen an dieser Stelle auf die entsprechenden Veröffentlichungen (21*, 22*, 23*).

Für unsere Betrachtungen wollen wir, wie erwähnt, voraussetzen, dass die Zugangsfunktion keine Störungen aufweist, ebenso wird stets angenommen, dass die Gesamtheit im Zeitpunkt der vollen Wirksamkeit erfasst wird.

§ 2.

Die Alterszusammensetzung. Die relative Altersstruktur. Der Altersquotient. Die Zugangsrate.

Für viele versicherungstechnische Untersuchungen ist von Bedeutung, die Alterszusammensetzung einer Personengesamtheit zu kennen. Denn es kann für eine soziale Versicherungskasse nicht gleichgültig sein, innerhalb welcher Grenzen sich der Bestand der Rentner und der Prämienpflichtigen entwickelt. So wird beispielsweise das starke Vorhandensein der höhern Altersklassen bei einer Pensionskasse die Auslagen an Renten stark vergrössern müssen und ein entsprechend hoher Fonds die Bedingung zu einer gedeihlichen Weiterentwicklung der Kasse sein.

Als Mass für die Alterszusammensetzung führen wir zwei Begriffe ein:

Einmal die *relative Altersstruktur*. Sie ist definiert durch das Verhältnis: Zahl der $x$jährigen dividiert durch ganzen Bestand, und sei bezeichnet mit $S_x^{(t)}$

$$S_x^{(t)} = \frac{L_x^{(t)}}{B\binom{x_2}{x_1}} \tag{8}$$

Zweitens den *Altersquotient*. Dieser Ausdruck gibt das zahlenmässige Verhältnis des Zugangs zu einem bestimmten Jahrgang.

$$Q_x^{(t)} = \frac{L_{x_0}^{(t)}}{L_x^{(t)}} \tag{9}$$

Ebenfalls wird der *reziproke Altersquotient* später eine Rolle spielen.

Die relative Altersstruktur wird anzuwenden sein, um die Stärke der Besetzung eines ganz bestimmten Jahrgangs in der Gesamtheit zu messen, während der Altersquotient Auskunft darüber gibt, in welchem Verhältnis der Neuzugang zu irgendeinem Jahrgang der Gesamtheit steht.

Spezielle Beachtung müssen wir dem Ausdruck $S_{x_0}^{(t)}$ schenken. Sinngemäss muss dabei die Gesamtheit die Alter von x_0 an aufwärts umfassen. Das Verhältnis des Zugangs zur Gesamtheit wird in grossem Masse erlauben, auf die fernere Entwicklung des Bestandes zu schliessen. An dieser Stelle sei nur auf die Wichtigkeit der Geburtenrate hingewiesen, deren rapides Sinken in allen Ländern die Statistiker besonders beschäftigt. Wir werden aber sehen, wie sich auf Grund unserer Annahmen dieses scheinbar beängstigende Fallen ganz normal erklären lässt.

In Anlehnung an den Ausdruck Geburtenrate werden wir das Verhältnis $S_{x_0}^{(t)}$ die *Zugangsrate* nennen. Unsere Definition weicht insofern von der gebräuchlichen ab, als dass die neuen Elemente vorerst gar nicht in $B\binom{x_2}{x_1}$ einzutreten brauchen, sondern nur $B\binom{x_n}{x_0}$ angehören.

Kapitel II.

Die Bevölkerung auf Grund der logistischen Zugangsfunktion.

§ 1.

Die Zugangsfunktion.

In der Einleitung ist darauf hingewiesen worden, wie es gelang, die zeitliche Veränderung des Bevölke-

rungsstandes mit guter Übereinstimmung durch die logistische Kurve darzustellen. In der schon zitierten Abhandlung von Yule wurde fernerhin rein rechnerisch gezeigt, wie dann Sterbe- und Geburtenrate in Annäherung ebenfalls einer logistischen Kurve folgen. Es muss daher interessieren, auch auf das Geburtengesetz zurückzuschliessen, oder wenn wir uns auf die erwachsene Bevölkerung beschränken, auf das Gesetz, nach dem der Neuzugang vor sich geht. Wir haben uns aber entschlossen, den andern Weg zu gehen, über den Zugang zum vorneherein zu verfügen.

Wir nehmen nun an, die Zugangsfunktion sei die logistische Funktion, und wir werden darauf die weitern Berechnungen stellen.

Die Gründe zur Annahme der logistischen Kurve als Zugangskurve sind die nämlichen wie zur Annahme als Wachstumskurve für eine ganze Bevölkerung. Es ist undenkbar, dass der Zugang stets nach einem Exponentialgesetz vor sich geht, denn einmal muss ein stationärer Zustand eintreten. Wir weisen an dieser Stelle noch einmal darauf hin, dass wir auch hier die logistische Kurve nicht als einzig mögliche und immer gültige Zugangskurve zu einer Gesamtheit ansehen, sondern lediglich als Normalfall. Es handelt sich um eine Kurve, die zu keinen Absurditäten führt und von einfacher Bauart ist.

Für die Folge wird es gut sein, einige Begriffe noch einmal zusammenzufassen. Wenn in Zukunft von einer Bevölkerung die Rede ist, so ist stets eine Gesamtheit von erwachsenen Personen darunter verstanden. Alle Zugänge geschehen im gleichen Alter x_0, das Ausscheiden aus der Gesamtheit erfolgt einzig durch Tod.

Unserer Annahme zufolge ist die Zugangsfunktion von der Form:

$$L_{x_0}^{(t)} = \frac{L}{1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}} \tag{10}$$

L gibt die Erneuerungszahl an, gegen die $L_{x_0}^{(t)}$ im Beharrungszustand hinstrebt. Wie vorher ist β identisch mit der Abszisse des Inflexionspunktes. Durch die Transformation $\beta - t \rightarrow -t$ verschieben wir den Ursprung um die Strecke β. Durch die Setzung $\frac{1}{\alpha} = \delta$ endlich wird (10) zu:

$$L_{x_0}^{(t)} = \frac{L}{1 + e^{-\delta t}} \tag{11}$$

Gemäss (7), bilden wir die Intensität der Zunahme $\sigma(t)$

$$\sigma(t) = \delta \left(1 - \frac{L_{x_0}^{(t)}}{L} \right) \tag{12}$$

Bei grossem negativen t kann $L_{x_0}^{(t)} : L$ vernachlässigt werden. Die Intensität $\sigma(t)$ ist konstant und gleich δ. Durch einen analogen Integrationsübergang wie in § 1 kann leicht nachgewiesen werden, dass die Zugangsfunktion durch die Exponentialfunktion dargestellt ist, d. h.

$$L_{x_0}^{(t)} = K \cdot e^{\delta t}.$$

Damit gewinnen wir das Ergebnis: bei grossem negativen t lässt sich die logistische Kurve durch die Exponentiallinie angenähert darstellen. Dieses Resultat ist auch praktisch von Bedeutung: setzt man nämlich die letzte Beziehung in (5) ein, so lässt sich $B\binom{x_2}{x_1}$ bestimmen zu:

$$B\binom{x_2}{x_1} = B_0 \cdot e^{\delta t} \tag{13}$$

und damit müsste die Gesamtheit selbst einer geometrischen Progression gehorchen. Bei Annahme einer logistischen Zugangsfunktion wird im Anfang die daraus resultierende Bevölkerungsgruppe einer geometrischen Progression gehorchen.

Ohne auf die mathematischen Eigenschaften der logistischen Kurve noch einmal einzugehen, sei jedoch auf eine wichtige Eigenschaft hingewiesen, die von Dr. *Friedli* gefunden wurde. Durch Multiplikation mit $e^{\delta t}$ transformiert sich (11) zu:

$$L_{x_0}^{(t)} = e^{\delta t} \frac{L}{1 + e^{\delta t}} \tag{14}$$

Bezeichnet man noch mit

$$f_1(t) = e^{\delta t}$$

$$f_2(t) = \frac{L}{1 + e^{\delta t}},$$

so heisst (14) auch:

$$L_{x_0}^{(t)} = f_1(t) \cdot f_2(t).$$

Die Zugangsfunktion lässt sich in 2 unabhängige Ordnungen spalten, wovon die eine einem Exponentialgesetz gehorcht, während die andere mit einer fallenden logistischen Kurve übereinstimmt. Die Ordnung $f_1(t)$ hat als Merkmal die hindernisfreie Entwicklung, durch die zweite Ordnung wird dieses Anwachsen gedämpft und eine endliche Grenze eingehalten. Figur 1 veranschaulicht den Verlauf der beiden Ordnungen.

§ 2.

Summe und Differenz, sowie Quotient und Produkt von logistischen Funktionen.

Zur Entwicklung einiger Ausdrücke in den folgenden §§ bedürfen wir mehrerer mathematischer Hilfssätze.

Vorerst muss untersucht werden, ob die Summe zweier logistischer Funktionen wieder eine logistische Funktion ergibt. Es seien deshalb

$$y_1 = \frac{L_1}{1 + e^{\delta_1 (\beta_1 - t)}} \tag{15}$$

$$y_2 = \frac{L_2}{1 + e^{\delta_2 (\beta_2 - t)}} \tag{16}$$

zwei beliebige logistische Funktionen. Ausgenommen im Falle wo $\delta_1 = \delta_2$ und $\beta_1 = \beta_2$, wird die Summe $y = y_1 + y_2$ keine logistische Funktion ergeben. Haben aber beide Funktionen ungefähr gleichen Verlauf, so wird die Summe angenähert wieder logistischen Charakter haben. Es wird daher sein:

$$y = \frac{L}{1 + e^{\delta(\beta - t)}} \tag{17}$$

worin die Konstanten δ, β und L aus den beiden Komponentfunktionen zu bestimmen sind.

Die Amerikaner *Pearl* und *Reed* (24*) entwickelten eine diesbezügliche Methode, und die Ergebnisse seien hier angeführt. Durch Gleichsetzen der Momente der Komponentfunktionen und der resultierenden Funktion fanden sie folgende 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 \\ L \cdot \beta &= L_1 \cdot \beta_1 + L_2 \cdot \beta_2 \\ a^2 \cdot L &= a_1^2 \cdot L_1 + 3 L_1 \cdot (\beta_1 - \beta)^2 + a_2^2 \cdot L_2 + 3 L_2 \cdot (\beta_2 - \beta)^2 \end{aligned}\right\} (18)$$

woraus sich der Reihe nach L, β, $a = \frac{1}{\quad}$ bestimmen lassen.

Aus dem Ergebnis, dass die Summe von 2 (und damit natürlich auch von mehreren) logistischen Funktionen in der Regel keine Funktion von genau gleichem Typus mehr ist, geht unmittelbar hervor, dass auch die Differenz keine logistische ergibt.

Eine fernere Untersuchung bezieht sich auf den Quotienten zweier logistischer Funktionen. Nachdem man in (15)

$$\beta_1 - t \to -t$$

ersetzt hat, folgt dass in (16)

$$\beta_2 - t \to \beta_2 - \beta_1 - t = \beta - t$$

anzunehmen ist. Mit der fernern Einschränkung $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ lauten die beiden Beziehungen:

$$y_1 = \frac{L_1}{1 + e^{-\delta t}} \tag{19}$$

$$y_2 = \frac{L_2}{1 + e^{-\delta (t - \beta)}} \tag{20}$$

Sodann zerlegt man gemäss (14) in die beiden Ordnungen $f_1(t)$ und $f_2(t)$:

$$y_1 = e^{\delta t} \cdot \frac{L_1}{1 + e^{\delta t}}$$

$$y_2 = e^{\delta(t-\beta)} \cdot \frac{L_2}{1 + e^{\delta(t-\beta)}},$$

woraus der Quotient

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{L_2}{L_1} e^{-\delta\beta} \cdot \frac{1 + e^{\delta t}}{1 + e^{\delta(t-\beta)}} \qquad (21)$$

hervorgeht. Man kann sich nun leicht überzeugen, dass die folgende Identität gilt:

$$\frac{1 + e^{\delta t}}{1 + e^{\delta(t-\beta)}} = 1 + \frac{e^{\delta\beta} - 1}{1 + e^{\delta(\beta-t)}},$$

so dass (21) auch geschrieben werden kann als:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{L_2}{L_1} e^{-\delta\beta} + \frac{\frac{L_2}{L_1}(1 - e^{-\delta\beta})}{1 + e^{\delta(\beta-t)}} \qquad (22)$$

Der erste Teil des Ausdruckes (22) ist zeitlich konstant und sei mit A_β bezeichnet. Der zweite Teil ist wieder eine logistische Funktion, die dem Grenzwert:

$$L_\beta = \frac{L_2}{L_1}(1 - e^{-\delta\beta}) \quad \text{zustrebt.} \qquad (23)$$

Der Quotient zweier logistischer Funktionen, die in δ übereinstimmen, ist wieder eine logistische Funktion, vermehrt um eine Konstante.

$$\frac{y_2}{y_1} = A_\beta + \frac{L_\beta}{1 + e^{\delta(\beta-t)}} = K + y(t) \qquad (22a)$$

Ist β positiv, so wird auch $1 - e^{-\delta\beta}$ positiv, da δ stets grösser null vorausgesetzt ist, und der Quotient weist den folgenden Verlauf auf: von A_β bei $t = -\infty$ *steigt* die Kurve stetig und logistisch bis zu einem Maxi-

mum $L_2 : L_1$, das bei $t = \infty$ erreicht wird. Zur Zeit $t = \beta$ geht sie durch den Wendepunkt, wo sie eine Ordinate vom Betrage

$$\frac{L_2}{2L_1}(1 + e^{-\delta\beta}) \quad \text{aufweist.}$$

Bei negativem β hingegen würde L_β negativ; aber (22) lässt sich auch schreiben als:

$$\frac{y_2}{y_1} = A_\beta - \frac{\frac{L_2}{L_1}(e^{-\delta\beta} - 1)}{1 + e^{\delta(\beta - t)}} \tag{24}$$

Damit wird das Maximum des logistischen Anteils wieder positiv, nur *fällt* jetzt die Kurve stetig und logistisch von A_β bis $\frac{L_2}{L_1}$.

Nach unsern Setzungen war aber $\beta = \beta_2 - \beta_1$. Soll nun β positiv sein, so muss $\beta_2 > \beta_1$ oder mit andern Worten, die Kurve y_2 kommt später in den Wendepunkt. Umgekehrt bedeutet negatives β, dass $\beta_2 < \beta_1$ oder dass y_1 später umwendet.

Aus (22*a*) geht unmittelbar hervor, dass

$$y_2 - K \cdot y_1 = y_1 \cdot y,$$

die linke Seite ist als Differenz zweier logistischer Funktionen keine logistische Funktion. *Also gilt: das Produkt zweier logistischer Funktionen ist keine reine logistische Funktion.*

§ 3.

Die Bevölkerung.

Wir haben der Zugangsfunktion eine feste Gestalt gegeben in der Form der logistischen Funktion und gehen

nun daran, zu untersuchen, welchem Wachstumsgesetz die Bevölkerung $B\binom{x_2}{x_1}$ gehorchen muss. Aus (5) geht nach Einsetzung von (11) die folgende Darstellung für die Gesamtheit B hervor:

$$B\binom{x_2}{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{L}{1 + e^{\delta(\beta - t + x - x_0)}} \, {}_{x-x_0}p_{x_0} \cdot dx.$$

Durch die weitere Transformation $\beta - t + x - x_0 \rightarrow -t + x$ geht die obenstehende Formel über in:

$$B\binom{x_2}{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{L}{1 + e^{-\delta(t-x)}} \, {}_{x-x_0}p_{x_0} \cdot dx \qquad (25)$$

nun lässt sich ${}_{x-x_0}p_{x_0}$ nach (6) ersetzen durch $\frac{f(x)}{f(x_0)}$, so dass:

$$B\binom{x_2}{x_1} = \frac{L}{f(x_0)} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1 + e^{-\delta(t-x)}} \cdot dx \qquad (26)$$

Wir nehmen nun die folgende Umformung vor. Da für die Reihenentwicklung des Ausdruckes $\frac{1}{1+q}$ zwei Entwicklungen gelten, je nachdem $q < 1$ oder $q > 1$ ist, folgt

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + - \ldots\ldots \text{ wo } q < 1$$

$$\frac{1}{1+q} = q^{-1} - q^{-2} + q^{-3} - + \ldots\ldots \text{ wo } q > 1.$$

Nun lässt sich der Integrand in (26) schreiben als:

$$\frac{1}{1+e^{-\delta(t-x)}} = \frac{1}{1+e^{-\delta(t-\tau)}} \cdot \frac{1+e^{-\delta(t-\tau)}}{1+e^{-\delta(t-x)}}.$$

Nachdem man noch den Ausdruck in zwei Teile auflöst und die oben mitgeteilte erste Reihenentwicklung anwendet (wo $q = e^{-\delta(t-x)}$), bestimmt sich die nachstehende Beziehung:

$$\frac{1}{1+e^{-\delta(t-x)}} = \frac{1}{1+e^{-\delta(t-\tau)}}\left[1+\sum_{1}^{\infty n}(-1)^n \cdot e^{-n\delta(t-x)}\right]+$$

$$+\frac{1}{1+e^{\delta(t-\tau)}}\sum_{0}^{\infty n}(-1)^n \cdot e^{-n\delta(t-x)} \qquad (\alpha)$$

In Hinblick auf die spätern Untersuchungen haben wir einen Parameter τ eingeführt, über den wir weiter hinten verfügen werden. Es sei lediglich bemerkt, dass τ von der Dimension einer Zeit ist.

Führt man (α) in (26) ein, so gelangt man zu:

$$B\binom{x_2}{x_1} =$$

$$= \frac{L}{f(x_0)}\frac{1}{1+e^{-\delta(t-\tau)}}\left[\int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot dx + \sum_{1}^{\infty n}(-1)^n \cdot e^{-n\delta t}\int_{x_1}^{x_2} e^{n\delta x}\cdot f(x)\cdot dx\right]+$$

$$+\frac{L}{f(x_0)}\frac{1}{1+e^{\delta(t-\tau)}}\sum_{0}^{\infty n}(-1)^n \cdot e^{-n\delta t}\int_{x_1}^{x_2} e^{n\delta x}\cdot f(x)\cdot dx \qquad (27)$$

Abkürzend bezeichne:

$$J_n = \int_{x_1}^{x_2} e^{n\delta x}\cdot f(x)\cdot dx \qquad (28)$$

Dann ist:

$$B\binom{x_2}{x_1} = \frac{L}{f(x_0)} \frac{J_0}{1+e^{-\delta(t-\tau)}} + \frac{L}{f(x_0)} \frac{1}{1+e^{-\delta(t-\tau)}} \sum_1^\infty{}^n (-1)^n \cdot e^{-n\delta t} \cdot J_n +$$

$$+ \frac{L}{f(x_0)} \frac{1}{1+e^{\delta(t-\tau)}} \sum_0^\infty{}^n (-1)^n \cdot e^{-n\delta t} \cdot J_n \qquad (29)$$

Die Anwendung der Reihenentwicklung verlangt, dass $e^{-\delta(t-x)} < 1$ sei. Dieser Bedingung genügen wir mit $t > x$. In bezug auf die Entwicklung (27) ist ferner notwendig $t > x_2$, ansonst im Grenzfall $n = \infty$ der Integrand an der obern Grenze divergieren würde.

Verwendet man hingegen die zweite Entwicklung, so gelangt man nach verschiedenen Umformungen zu der folgenden Beziehung:

$$\frac{1}{1+e^{-\delta(t-x)}} = \frac{e^{\delta\tau}}{1+e^{-\delta(t-\tau)}} \left[e^{-\delta x} + \sum_1^\infty{}^n (-1)^n \cdot e^{n\delta t-(n+1)\delta x} \right] +$$

$$+ \frac{e^{\delta t}}{1+e^{-\delta(t-\tau)}} \sum_0^\infty{}^n (-1)^n \cdot e^{n\delta t-(n+1)\delta x} \qquad (30)$$

Diese Entwicklung konvergiert für alle $t < x$. Eingesetzt in (26), ergibt sie uns einen zweiten Ausdruck für B.

$$B\binom{x_2}{x_1} = \frac{L}{f(x_0)} \frac{e^{\delta\tau}}{1+e^{-\delta(t-\tau)}} \left[\int_{x_1}^{x_2} e^{-\delta x} \cdot f(x) \cdot dx + \right.$$

$$\left. + \sum_1^\infty{}^n (-1)^n \cdot e^{n\delta t} \int_{x_1}^{x_2} e^{-(n+1)\delta x} \cdot f(x) \cdot dx \right] +$$

$$\frac{L}{f(x_0)} \frac{e^{\delta t}}{1+e^{-\delta(t-\tau)}} \sum_0^\infty{}^n (-1)^n \cdot e^{n\delta t} \int_{x_1}^{x_2} e^{-(n+1)\delta x} \cdot f(x) \cdot dx \qquad (31)$$

Zur Abkürzung sei:

$$J'_n = \int_{x_1}^{x_2} e^{-(n+1)\,\delta x} \cdot f(x) \cdot dx.$$

Damit wird:

$$B\binom{x_2}{x_1} = \frac{L}{f(x_0)} \frac{e^{\delta\tau} \cdot J'_0}{1 + e^{-\delta(t-\tau)}} + \frac{L}{f(x_0)} \frac{e^{\delta\tau}}{1 + e^{-\delta(t-\tau)}} \sum_{1}^{\infty n} (-1)^n \cdot e^{n\delta t} \cdot J'_n +$$

$$+ \frac{L}{f(x_0)} \frac{e^{\delta t}}{1 + e^{-\delta(t-\tau)}} \sum_{0}^{\infty n} (-1)^n \cdot e^{n\delta t} \cdot J'_n \qquad (32)$$

Diese Entwicklung konvergiert für alle $t < x_1$.

Aus den Formeln (29) und (32) können wir über das Wachstumsgesetz den folgenden Satz entnehmen:

Satz I. Unter der Voraussetzung einer logistischen Zugangsfunktion verfolgt die daraus resultierende Gesamtheit (Bevölkerung) in erster Annäherung ebenfalls eine logistische Kurve. Dazu kommt noch eine Entwicklung von zeitlich nicht konstanten Funktionen, die im allgemeinen nicht logistischer Natur sind.

Diese Entwicklung wollen wir *Störungsfunktion* nennen, und wir bezeichnen sie mit $\varphi_1(t)$ in (29) resp. mit $\varphi_2(t)$ in (32). Lediglich zur bessern Darstellung werden wir den logistischen Anteil mit $y_1^{(t)}$ resp. $y_2^{(t)}$ benennen.

$$y_1^{(t)} = \frac{L}{f(x_0)} \frac{J_0}{1 + e^{-\delta(t-\tau)}}$$

$$y_2^{(t)} = \frac{L}{f(x_0)} \frac{e^{\delta\tau} \cdot J'_0}{1 + e^{-\delta(t-\tau)}}$$

Demnach können (29) und (32) in die Form gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} B\binom{x_2}{x_1} &= y_1^{(t)} + \varphi_1(t) \\ B\binom{x_2}{x_1} &= y_2^{(t)} + \varphi_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Die Formeln (33) gestatten aber die Berechnung der Gesamtheit nur zu Zeiten $t > x_2$ und $t < x_1$, nicht aber wenn $x_1 < t < x_2$. Um gleichwohl für die dazwischenliegenden Zeiten die Möglichkeit der Berechnung zu erhalten, gehen wir wie folgt vor. Es sei $B\binom{x_2}{x_1}$ zu bestimmen zu einer Zeit $t = \xi$, wo $x_1 < \xi < x_2$. Dann trennen wir die Gesamtheit B in 2 Untergesamtheiten auf, wovon die eine alle Alter x_1 bis ξ, die andere alle von ξ bis x_2 umfasst. Also

$$B\binom{x_2}{x_1} = B\binom{\xi}{x_1} + B\binom{x_2}{\xi}.$$

Für die erste Gesamtheit ist aber $t = \xi > x_1$ erfüllt, so dass nach (29) gerechnet werden kann; für die zweite gilt $t = \xi < x_2$, und die Bestimmung geschieht nach (32). Dadurch ist die Berechnungsmöglichkeit über alle t ermöglicht.

Für die Zukunft werden wir uns meistens nur noch mit der Darstellung der Gesamtheit zu Zeiten $t > x_2$ befassen, da die Beziehungen (29) und (32) von analoger Bauart sind. Eine Ausnahme davon bildet nur die Bestimmung der untern Grenzlage bei $t = -\infty$.

§ 4.

Einführung der unvollständigen Gammafunktionen. Einige Eigenschaften.

Bis dahin haben wir bezüglich der Überlebensordnung keinerlei Annahmen getroffen, und unser Satz über das Wachstum der Gesamtheit gilt unabhängig von der Ausscheidefunktion. Wir legten aber fest,

dass alle die betrachteten Gesamtheiten nur *erwachsene* Elemente umfassen sollen. Daher kann man sich $f(x)$ durch das Makehamsche Gesetz dargestellt denken. Die Ungenauigkeit, mit der das zitierte Gesetz die Zahl der jugendlichen Elemente wiedergibt, ist damit ausgeschaltet.

Wenn wieder x das Alter angibt, so hat das Makehamsche Gesetz die Form:

$$f(x) = h \cdot s^x \cdot g^{c^x}$$

wo h, s, g, c vier Materialkonstante sind.

Für ein Integral J_n kann dann geschrieben werden:

$$J_n = h \int_{x_1}^{x_2} e^{n\delta x} \cdot s^x \cdot g^{c^x} \cdot dx.$$

Durch den Übergang zurExponentialfunktion finden wir:

$$J_n = h \int_{x_1}^{x_2} e^{-x\left(ln\frac{1}{s} - n\delta\right) - c^x \cdot ln\frac{1}{g}} \cdot dx \qquad (34)$$

Mit der Abkürzung $ln\frac{1}{g} = \lambda$ wird aus (34):

$$J_n = h \int_{x_1}^{x_2} e^{-x\left(ln\frac{1}{s} - n\delta\right) - \lambda c^x} \cdot dx.$$

An Stelle der Variablen x führen wir die neue Variable u ein, gebunden mit x durch folgende Beziehungen:

$$\lambda \cdot c^x = u$$

$$x = \frac{ln\, u - ln\, \lambda}{ln\, c}, \quad dx = \frac{1}{ln\, c} \frac{du}{u}.$$

Grenzen:

x	u
x_2	$\lambda c^{x_2} = X_2$
x_1	$\lambda c^{x_1} = X_1$

$$J_n = \frac{h}{ln\, c} \int_{X_1}^{X_2} e^{-\frac{ln\frac{1}{s} - n\delta}{ln\, c}(ln\, u - ln\, \lambda) - u} \cdot \frac{du}{u}.$$

Endlich sei noch

$$-\frac{ln\frac{1}{s} - n\delta}{ln\, c} = k$$

$$J_n = \frac{h}{\lambda^k \cdot ln\, c} \int_{X_1}^{X_2} e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du \qquad (35)$$

Als Eulersches Integral II. Art wird nun der Ausdruck

$$J = \Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du$$

bezeichnet (25*, 26*). Durch Trennung in 2 Integrale führen wir zwei neue Funktionen ein, die unvollständigen Gammafunktionen:

$$\Gamma(k) = \int_0^{x} e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du + \int_x^{\infty} e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du, \; x > 0.$$

Sie werden bezeichnet mit:

$$\left.\begin{aligned} P(x, k) &= \int_0^{x} e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du \\ Q(x, k) &= \int_x^{\infty} e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Offenbar muss dann gelten:

$$\Gamma(k) = P(x, k) + Q(x, k) \qquad (36a)$$

Das Integral (35) lässt sich dann in die beiden geschlossenen Ausdrücke bringen:

$$J_n = \frac{h}{\lambda^k \cdot ln\, c} \left(P(X_2, k) - P(X_1, k)\right) \qquad (37)$$

$$J_n = \frac{h}{\lambda^k \cdot ln\, c} \left(Q(X_1, k) - Q(X_2, k)\right) \qquad (38)$$

Zur praktischen Berechnung wird die Beziehung (37) die bessern Dienste leisten als (38). Denn entwickelt man in der Definitionsgleichung (36) die Exponentialfunktion in eine Reihe:

$$P(x,k) = \int_0^x e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du = \int_0^x \sum_0^\infty{}_s (-1)^s \cdot \frac{u^s}{s!} \cdot u^{k-1} \cdot du$$

und integriert gliedweise, so ergibt sich ohne weiteres die folgende Reihenentwicklung:

$$P(x, k) = \sum_0^\infty{}_s \frac{(-1)^s}{s!} \frac{x^{k+s}}{k+s} \qquad (39)$$

Eine andere Form, die von *Legendre* herrührt, sei ohne Beweis angegeben:

$$P(x, k) = e^{-x} \sum_0^\infty{}_s \frac{x^{k+s}}{k\,(k+1)\,(k+2)\,..\,(k+s)} \qquad (40)$$

Die letzte Entwicklung konvergiert in allen Punkten der k-Ebene, ausgenommen in den negativen ganzzahligen k, den Polen der Funktion.

Für die Q-Funktion existiert ebenfalls eine Reihenentwicklung, die wir *Hermite* verdanken. Die Definitionsgleichung der Q-Funktion lässt sich nämlich auch schreiben als:

$$Q(x,k) = \int_x^\infty e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du = \sum_0^\infty{}_n \int_{x+n}^{x+n+1} e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du = \sum_0^\infty{}_n Q_n \quad (41)$$

wo n alle ganzen nicht negativen Zahlen durchläuft.

Zur Auswertung eines Teilintegrals setzen wir:

$$x + n + z = u$$

$$dz = du$$

Grenzen:	u	z
	$x+n$	0
	$x+n+1$	1

$$Q_n = e^{-(x+n)} \cdot (x+n)^{k-1} \int_0^1 e^{-z} \cdot \left(1 + \frac{z}{x+n}\right)^{k-1} \cdot dz \quad (42)$$

Dieser Ausdruck kann, nach Entwicklung der Potenzfunktion in die Binomialreihe, geschrieben werden als:

$$Q_n = e^{-(x+n)} \cdot (x+n)^{k-1} \cdot \sum_0^\infty{}_s \binom{k-1}{s} \cdot \frac{1}{(x+n)^s} \underbrace{\int_0^1 e^{-z} \cdot z^s \cdot dz}_{P(1,s+1)}$$

eingeführt in (41):

$$Q(x,k) = \sum_0^\infty{}_s \sum_0^\infty \binom{k-1}{s} \cdot e^{-(x+n)} \cdot (x+n)^{k-s-1} \cdot P(1, s+1) \quad (43)$$

Der Kürze halber setzt man noch:

$$\sum_{0}^{\infty} {}_n e^{-(x+n)} \cdot (x+n)^{k-s-1} = R_x (k-s) \qquad (44)$$

und erhält dadurch die Schlussformel:

$$Q(x, k) = \sum_{0}^{\infty} {}_s \binom{k-1}{s} \cdot R_x (k-s) \cdot P(1, s+1) \qquad (45)$$

Durch partielle Integration von (36) oder besser noch durch entsprechende Kombinationen der Beziehungen (40) findet man, dass zwischen $P(x, k)$ und $P(x, k+1)$ die folgende Relation gilt:

$$P(x, k+1) = k \cdot P(x, k) - e^{-x} \cdot x^k \qquad (46)$$

Unter Verwendung von (36*a*) ergibt sich die entsprechende für die Q-Funktion:

$$Q(x, k+1) = k \cdot Q(x, k) + e^{-x} \cdot x^k \qquad (46a)$$

Ein weiterer, für unsere Zwecke benötigter Zusammenhang existiert zwischen der unvollständigen Gammafunktion und den hypergeometrischen Reihen. Mit Gauss definieren wir als hypergeometrische Reihe den Ausdruck:

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a \,.\, b}{1!\, c} x + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{2!\, c(c+1)} x^2 + \ldots$$

Darin sei x als die Variable aufgefasst, während die Konstanten a, b, c, keine ganzen negativen Zahlen sein sollen. Mit diesen Einschränkungen ist die Reihe unbegrenzt und enthält keine Glieder, die unendlich werden könnten.

Aus (46) geht unmittelbar hervor, dass

$$(k-1).\ P(x, k-1) = P(x, k) + e^{-x} \cdot x^{k-1} =$$
$$= e^{-x} \cdot x^{k-1}\left[1 + \frac{x}{k} + \frac{x^2}{k(k+1)} + \ldots\right].$$

Die Klammer ist nun aber eine spezielle hypergeometrische Reihe. Wird nämlich in der Definitionsgleichung $\lim a = \infty$, $b = 1$, $c = k$ und $x = x : a$, so reduziert sich $\lim_{a=\infty} F\left(a, 1, k, \frac{x}{a}\right)$ auf die Klammerfunktion. Daher folgt:

$$\lim_{a=\infty} F\left(a, 1, k, \frac{x}{a}\right) = (k-1) \cdot e^{x} \cdot x^{1-k} \cdot P(x, k-1) \quad (47)$$

An dieser Stelle sei überhaupt auf die Wichtigkeit der unvollständigen Gammafunktion in der Versicherungsmathematik hingewiesen. Unter Voraussetzung des Makehamschen Gesetzes lassen sich die kontinuierlich berechneten Rentenbarwerte und Reserven in geschlossener Form durch die genannten Funktionen darstellen (27*).

§ 5.

Zusammenhang mit den hypergeometrischen Reihen.

Bei einschränkenden Annahmen lässt sich die Beziehung für B in eine Abhängigkeit von hypergeometrischen Reihen umformen, deren einzelne Glieder spezielle Eigenschaften aufweisen.

Die Beziehung (29) lässt sich auch schreiben, wenn die Summe von 0 bis ∞ genommen wird, als:

$$B\binom{x_2}{x_1} = \frac{L}{f(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-n\delta t} \cdot J_n \left(\frac{1}{1 + e^{-\delta(t-\tau)}} + \frac{1}{1 + e^{\delta(t-\tau)}}\right) =$$
$$= \frac{L}{f(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-n\delta t} \cdot J_n \quad (48)$$

In der Bestimmungsgleichung für J_n, Formel (37), legen wir dem Parameter k, der in n variabel ist, die folgende Beschränkung auf. Es sei:

$$\frac{\delta}{ln\, c} = \frac{1}{a\, ln\, c} = 1,$$

somit

$$k = \frac{-ln\frac{1}{s}}{ln\, c} + n,$$

abkürzend sei noch

$$-\frac{ln\frac{1}{s}}{ln\, c} = p,$$

also

$$k = p + n \tag{49}$$

Unter Verwendung von (37) geht sodann (48) über in:

$$B\binom{x_2}{x_1} = \frac{L \cdot h}{\lambda^p \cdot f(x_0) \cdot ln\, c}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{e^{-n\delta t}}{\lambda^n} P(X_2, p+n) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{e^{-n\delta t}}{\lambda^n} P(X_1, p+n)\right].$$

Die Summen in der Klammer sind analog gebaut, so dass wir uns auf die Untersuchung der einen beschränken können. Bezeichnet darin noch $q = \frac{e^{-\delta t}}{\lambda}$, so kann sie dargestellt werden durch:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot q^n \cdot P(x, p+n) \tag{50}$$

In § 4 entwickelten wir jedoch eine Formel, wonach:

$$P(x, p-1) = e^{-x} \cdot x^{p-1} \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \lim_{a=\infty} F\left(a, 1, p, \frac{x}{a}\right).$$

Demnach ist auch:

$$P(x, p+n) = e^{-x} \cdot x^{p+n} \cdot \frac{1}{p+n} \cdot \lim_{a=\infty} F\left(a, 1, p+n+1, \frac{x}{a}\right) \quad (51)$$

Nach Anwendung dieser Formel geht für S, nachdem man noch vom konstanten Faktor $e^{-x} \cdot x^p$ vor der Summe abgesehen hat und $x \cdot q$ wieder q nennt, die folgende Relation hervor:

$$S' = \sum_{0}^{\infty n} \frac{(-1)^n}{p+n} \cdot q^n \cdot \lim_{a=\infty} F\left(a, 1, p+n+1, \frac{x}{a}\right) \quad (52)$$

Die letzte Summenformel gibt nun Anlass zu einer interessanten Untersuchung auf dem Gebiete der hypergeometrischen Reihen. Greifen wir 3 aufeinanderfolgende Glieder ohne Rücksicht auf ihre Koeffizienten heraus, z. B.:

$$\left.\begin{aligned} F_{-1} &= \lim_{a=\infty} F\left(a, 1, p+m-1, \frac{x}{a}\right) \\ F &= \lim_{a=\infty} F\left(a, 1, p+m, \frac{x}{a}\right) \\ F_{+1} &= \lim_{a=\infty} F\left(a, 1, p+m+1, \frac{x}{a}\right) \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

so erkennen wir sie als eine besondere Art der folgenden 3 hypergeometrischen Reihen:

$$\left.\begin{aligned} F_{-1} &= F(a, b, c-1, x) \\ F &= F(a, b, c, x) \\ F_{+1} &= F(a, b, c+1, x) \end{aligned}\right\} \quad (53a)$$

Die einzelnen Funktionen in (53a) unterscheiden sich in der Konstanten c immer um die Einheit. Solche

Funktionen werden mit *Gauss* (28*) als benachbarte Funktionen bezeichnet. Eine benachbarte Funktion zu $F(a, b, c, x)$ wird daher von der Form sein:

$$F(a \pm 1, b \pm 1, c \pm 1, x),$$

und man sieht, dass 6 solcher Möglichkeiten bestehen.

Durch Veränderung aller 3 Konstanten a, b und c um je die Einheit gelangt man schliesslich zu einer Funktion wie

$$F(a + l, b + m, c + n, x),$$

die wir ebenfalls mit Gauss als verwandte Funktionen bezeichnen. Zwischen 3 solchen verwandten Funktionen besteht nun eine identische lineare Beziehung:

$$A_1 \cdot F_1 + A_2 \cdot F_2 + A_3 \cdot F_3 = 0,$$

wo die A_i rationale Funktionen von x sind. Beispielsweise gilt speziell:

$$(b—a) \cdot F(a,b,c,x) + a \cdot F(a+1,b,c,x) —b \cdot F(a,b+1,c,x)$$

Ferner überzeugt man sich leicht, dass wenn

$$F = F(a, b, c, x),$$

so
$$\frac{dF}{dx} = \frac{a \cdot b}{c} \cdot F(a + 1, b + 1, c + 1, x)$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)} \cdot F(a + 2, b + 2, c + 2, x).$$

Daraus folgt, dass F, $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{d^2F}{dx^2}$ ebenfalls verwandte Funktionen sind, zwischen denen die bereits mitgeteilte lineare Identität besteht, nämlich die hypergeometrische Differentialgleichung. Diese hypergeometrische Differentialgleichung ist nun von der Form:

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}+[c-(a+b+1)\,x]\cdot\frac{dF}{dx}-a\cdot b\cdot F=0,$$

und sie besitzt im Falle, dass $\lim a=\infty$, das partikuläre Integral:

$$\lim_{a=\infty}F\left(a,1,c,\frac{x}{a}\right)=e^x\cdot x^{1-c}\cdot(c-1)\cdot P(x,c-1).$$

Wir verweisen an dieser Stelle ausser auf die Vorlesung von Klein auf *Forsyth:* Lehrbuch der Differentialgleichungen, Braunschweig 1912, S. 213 ff.

§ 6.

Die Störungsfunktion.

Die Ergebnisse in § 3 drängen zweierlei Fragen auf. Einmal lassen die Beziehungen (33) erkennen, dass die Gesamtheit B zwei logistischen Gesetzen zu gehorchen hat, denen je eine Störungsfunktion überlagert ist. Daher muss untersucht werden, inwiefern sich die beiden Funktionen unterscheiden.

Seinerzeit haben wir den Parameter τ noch unbestimmt eingeführt. Indem wir nun die beiden Wachstumsgesetze einander gleichsetzen, also $y_1^{(t)}=y_2^{(t)}$, gewinnen wir eine Beziehung, woraus sich τ bestimmen lässt. Sollen die beiden logistischen Funktionen übereinstimmen, so müssen sie den gleichen Grenzwerten zustreben. Es muss also sein:

$$J_0=e^{\delta\tau}\cdot J_0'$$

Daraus ist:

$$\tau=\frac{1}{\delta}(ln\,J_0-ln\,J_0'). \tag{54}$$

Zu bemerken ist allerdings noch, dass dem Wachstums-

gesetz $y = y_1 = y_2$ eine entsprechende Störungsfunktion $\varphi_1(t)$ resp. $\varphi_2(t)$ überlagert ist.

Es ist auch möglich, einen obern Grenzwert für die Störungsfunktion anzugeben. Zu diesem Zwecke bilden wir das Verhältnis:

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_1(t)}{y_1^{(t)}} = \frac{\sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n \cdot e^{-n\delta t} \cdot J_n + e^{-\delta(t-\tau)} \sum_0^{\infty}{}_n (-1)^n \cdot e^{-n\delta t} \cdot J_n}{J_0}.$$

Wir untersuchen nun $\varphi(t)$ bei $t = x_2 + t'$ (wo $t' > 0$), wozu wir durch die Konvergenzbedingung gezwungen sind. Sodann gehen wir daran, $\varphi(t)$ eine Majorante gegenüberzustellen. Mit den oben angegebenen Annahmen wird der Zähler:

$$-\sum_1^{\infty}{}_n(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\delta t'} \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{n\delta x}}{e^{n\delta x_2}} \cdot f(x) \cdot dx +$$

$$+ e^{-\delta(x_2+t'-\tau)} \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-n\delta t'} \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{n\delta x}}{e^{n\delta x_2}} \cdot f(x) \cdot dx.$$

Da der Quotient $e^{\delta x} : e^{\delta x_2} < 1$ ist, bilden die Integrale eine abnehmende Reihe. Dividiert man noch durch J_0 und bezeichnet mit M einen Wert grösser als der grösste Wert, den der Quotient zweier solcher Integrale annehmen kann, so lässt sich das allgemeine Glied der zu $\varphi(t)$ majoranten Reihenentwicklung $\Phi(t)$ schreiben als:

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot e^{-n\delta t'} \cdot M + (-1)^n \cdot e^{-\delta(x_2+t'-\tau)} \cdot e^{-n\delta t'} \cdot M.$$

Die majorante Reihe hat dann die Form:

$$\Phi(t) = -M\left[e^{-\delta t'} - e^{-2\delta t'} + \ldots\right] + e^{-\delta(x_2+t'-\tau)} \cdot M \cdot \left[1 - e^{-\delta t'} + \ldots\right]$$

oder auch:

$$\Phi(t) = M\left[e^{-\delta t'} - e^{-2\delta t'} + \ldots\right](e^{-\delta(x_2 - z)} - 1)$$

Die Klammer nimmt aber den Wert an:

$$\text{Klammer} = \frac{e^{-\delta t'}}{1 + e^{-\delta t'}} = \frac{1}{1 + e^{\delta t'}},$$

so dass

$$\Phi(t) = \frac{M(e^{-\delta(x_2 - z)} - 1)}{1 + e^{\delta t'}}.$$

Aus diesem Resultat gehen die folgenden Schlüsse hervor:

a) die Störungsfunktion konvergiert, da das Verhältnis stets endlich bleibt;

b) ferner wird sich $\Phi(t)$ der fallenden logistischen Natur wegen rasch der Axe anschmiegen, noch mehr muss das daher bei $\varphi(t)$ der Fall sein;

c) bei $t = \infty$ verschwindet die Störungsfunktion.

§ 7.

Der Altersquotient. Die relative Altersstruktur. Die Zugangsrate.

Nachdem wir in § 2, Kapitel I, die nötigen Beziehungen zur Messung der Veränderung der Alterszusammensetzung in voller Allgemeingültigkeit aufgestellt haben, werden wir sie nun auf unsere speziellen Annahmen hin anwenden.

In erster Linie sei der Altersquotient untersucht. Nach Definition war er gegeben durch:

$$Q_x^{(t)} = \frac{L_{x_0}^{(t)}}{L_x^{(t)}}.$$

Für die Funktionen $L_{x_0}^{(t)}$ und $L_x^{(t)}$ substituieren wir die Werte:

$$L_{x_0}^{(t)} = \frac{L}{1 + e^{-\delta t}}$$

$$L_x^{(t)} = \frac{L}{1 + e^{-\delta (t-x+x_0)}} \cdot \frac{f(x)}{f(x_0)}.$$

Das gesuchte Verhältnis ist aber nichts anderes als der Quotient zweier logistischer Funktionen, die in δ übereinstimmen. Durch die Setzung $x - x_0 = -\beta$ und $t + \beta \to t$ transformieren sich die vorstehenden Gleichungen zu:

$$L_{x_0}^{(t)} = \frac{L}{1 + e^{-\delta (t-\beta)}}$$

$$L_x^{(t)} = \frac{L}{1 + e^{-\delta t}} \cdot \frac{f(x)}{f(x_0)},$$

woraus dann gemäss (24) der Quotient $Q_x^{(t)}$ bestimmt ist zu:

$$Q_x^{(t)} = \frac{f(x_0)}{f(x)} \cdot e^{-\delta\beta} - \frac{\frac{f(x_0)}{f(x)}\left(e^{-\delta\beta} - 1\right)}{1 + e^{\delta (\beta - t)}} \qquad (55)$$

oder

$$Q_x^{(t)} = \frac{f(x_0)}{f(x)} e^{\delta (x-x_0)} - \frac{\frac{f(x_0)}{f(x)}\left(e^{\delta (x-x_0)} - 1\right)}{1 + e^{\delta (x_0 - x - t)}} \qquad (55a)$$

Für unsere Betrachtungen kommt einzig die Möglichkeit $x > x_0$ in Frage, denn $x < x_0$ ist sinnlos. Die Konstante $\beta = x_0 - x$ ist demnach negativ. Vergleicht man noch mit den Folgerungen, die wir aus (24) gezogen haben, so lässt sich das folgende wichtige Resultat festhalten:

Satz II. Der Altersquotient verfolgt eine abfallende logistische Kurve. Von einer Höchstlage bei $t = -\infty$ *im Betrage von* $\frac{f(x_0)}{f(x)} e^{\delta(x-x_0)}$ *sinkt die Kurve bis auf die Tiefstlage* $\frac{f(x_0)}{f(x)}$, *die bei* $t = \infty$ *asymptotisch erreicht wird.*

Würde die Zugangsfunktion ständig den exponentiellen Verlauf beibehalten, wie es bei $t = -\infty$ der Fall ist, so müsste der Altersquotient auf der Höhe $\frac{f(x_0)}{f(x)} \cdot e^{\delta(x-x_0)}$ verharren. Auf den tiefern Sinn und die eminente Bedeutung dieses Ergebnisses werden wir im Anschluss an die Untersuchung der relativen Altersstruktur eingehender eintreten.

Vorerst wird aber noch der reziproke Altersquotient untersucht, der durch die Relation

$$\frac{1}{Q_x^{(t)}} = \frac{L_x^{(t)}}{L_{x_0}^{(t)}} \qquad \text{bestimmt ist.}$$

Durch eine analoge Transformation wie vorher mit $\beta = x - x_0$ findet man leicht:

$$\frac{1}{Q_x^{(t)}} = \frac{f(x)}{f(x_0)} e^{-\delta\beta} + \frac{\frac{f(x)}{f(x_0)}(1 - e^{-\delta\beta})}{1 + e^{\delta(\beta - t)}}$$

oder auch:

$$\frac{1}{Q_x^{(t)}} = \frac{f(x)}{f(x_0)} e^{-\delta(x-x_0)} + \frac{\frac{f(x)}{f(x_0)}\left[1 - e^{-\delta(x-x_0)}\right]}{1 + e^{\delta(x-x_0-t)}} \tag{56}$$

Da $\beta = x - x_0$ für ein gegebenes Alter stets eine positive Konstante ist, wird sich der Verlauf des reziproken Altersquotienten durch den folgenden Satz festlegen lassen:

Satz III. Von einem Minimum $\frac{f(x)}{f(x_0)}\, e^{-\delta(x-x_0)}$ *steigt der reziproke Altersquotient logistisch bis zu einem Maximum* $\frac{f(x)}{f(x_0)}$, *das bei* $t = \infty$ *erreicht wird.*

Die Definition der relativen Altersstruktur war nach (8) wie folgt:

$$S_x^{(t)} = \frac{L_x^{(t)}}{B\binom{x_2}{x_1}}.$$

Für $L_x^{(t)}$ wie für $B\binom{x_2}{x_1}$ haben wir die gewonnenen Werte einzusetzen:

$$\left.\begin{aligned} L_x^{(t)} &= \frac{L}{1 + e^{-\delta(t-x+x_0)}} \frac{f(x)}{f(x_0)} \\ B\binom{x_2}{x_1} &= y_1^{(t)} + \varphi_1(t) \\ B\binom{x_2}{x_1} &= y_2^{(t)} + \varphi_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Wir wissen aber, dass $L_x^{(t)}$ eine reine logistische Kurve verfolgt und dass ebenfalls B in guter Annäherung einer solchen gehorcht (zu bemerken ist noch, dass die Zähler- und Nennerfunktion nach unsern Darstellungen nicht immer auf den gleichen Zeitnullpunkt bezogen sind; eine Koordinatentransformation schafft aber sofort Übereinstimmung). Aus diesem Grunde wird $S_x^{(t)}$ als Quotient zweier (nahezu) logistischer Funktionen wieder den Charakter einer logistischen Funktion aufweisen müssen. Für die Kenntnis dieses Verlaufes ist vor allem massgebend, die Grenzlagen zu kennen. Grundsätzlich hat $S_x^{(t)}$ logistischen Verlauf, kommen dazu noch die Maximal- und Minimalstellen, so kann S als genügend bestimmt angesehen werden.

Von einer relativen Altersstruktur zu reden hat nur Sinn, wenn in der Gesamtheit das Alter x der Bedingung $x_1 < x < x_2$ genügt. Ist das nicht der Fall, so gibt $S_x^{(t)}$ einfach das Stärkenverhältnis eines Jahrganges zum Bestande B.

Aus (29) geht hervor, dass bei $t = \infty$, $B\binom{x_2}{x_1}$ den folgenden Grenzwert annimmt:

$$\lim_{t=\infty} B\binom{x_2}{x_1} = \frac{L \cdot J_0}{f(x_0)},$$

ferner wird $\lim_{t=\infty} L_x^{(t)} = L_x^{(\infty)} = \frac{f(x)}{f(x_0)} \cdot L,$

so dass $$S_x^{(\infty)} = \frac{f(x)}{J_0} \tag{58}$$

Für $t = -\infty$ würde $S_x^{(t)}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen; überdies müssen noch beide Kurven auf den gleichen Nullpunkt bezogen werden. Seinerzeit wurde bei der Bestimmung von $B, \beta - t + x - x_0$ durch $-t + x$ ersetzt, so dass für $L_x^{(t)}$ zu nehmen ist:

$$L_x^{(t)} = \frac{L}{1 + e^{-\delta(t-x)}} \frac{f(x)}{f(x_0)}.$$

Erweitert man noch $L_x^{(t)}$ mit $e^{-\delta x}$ und Formel (32) mit $e^{-\delta\tau}$, so kann im Grenzfall $e^{-\delta x} + e^{-\delta t}$ gegen $e^{-\delta\tau} + e^{-\delta t}$ gekürzt werden, so dass bleibt:

$$S_x^{(-\infty)} = \frac{f(x)}{J_0'} e^{-\delta x} \tag{59}$$

Grundsätzlich kann der Quotient zweier logistischer Funktionen eine steigende oder fallende Funktion ergeben. Die beiden Extremwerte geben darüber Auskunft. Bei steigender Tendenz wird der Quotient:

$$\frac{S_x^{(\infty)}}{S_x^{(-\infty)}} > 1 \quad \text{sein, d. h.} \quad e^{\delta x} \cdot \frac{J_0'}{J_0} > 1.$$

Aus dieser Bedingung lässt sich die weitere ableiten:

$$x > \frac{1}{\delta} (ln\, J_0 - ln\, J_0') \tag{60}$$

Satz IV. Für alle Alter, die der Bedingung (60) genügen, wird die relative Altersstruktur eine steigende Kurve bilden, für alle andern hingegen eine fallende. Wird einmal $x = \frac{1}{\delta} (ln\, J_0 - ln\, J_0')$, *so kehrt die relative Altersstruktur auf den gleichen Ausgangswert zurück.*

Auf zeitliche Konstanz darf im letzten Fall nicht geschlossen werden, denn die wäre nur da, wenn $L_x^{(t)}$ wie B eine übereinstimmende reine logistische Kurve verfolgen würde.

Die Bedingung (60) lässt indessen ein sehr wichtiges Resultat erkennen. Nehmen wir nämlich $x = x_0$, so ist ja $S_{x_0}^{(t)}$ als Zugangsrate definiert. Die numerische Rechnung wird nun bestätigen, dass die Zugangsrate durch eine fallende logistische Kurve dargestellt sein wird.

Identifizieren wir noch die Zugangsrate mit der Geburtenrate und die Gesamtheit $B\binom{x_2}{x_1}$ mit der Gesamtbevölkerung, so kann aus (60) die folgende Bedingung gefunden und der nachstehende Satz ausgesprochen werden:

$$0 < \frac{1}{\delta} (ln\, J_0 - ln\, J_0').$$

Satz V. Unter der Voraussetzung einer logistischen Geburtenkurve sinkt die Geburtenrate nach einer angenäherten logistischen Kurve.

Diese Erkenntnis ergibt sich ohne weiteres aus unsern bisherigen Ableitungen. Es gelang uns nachzuweisen, dass unter Annahme einer logistischen Zugangsfunktion ebenfalls die Bevölkerung in Annäherung einem logistischen Gesetze gehorcht, eine Tatsache, die durch Beobachtung für verschiedene Bevölkerungen nachgewiesen wurde. Ferner ist die fallende Geburtenrate eine mathematisch bewiesene Folge unserer Annahmen, und sie ist ebenfalls durch die Beobachtung erhärtet.

Anders gestalten sich, wie bereits bemerkt, die Verhältnisse für ein Alter $x > \frac{1}{\delta}(ln\, J_0 - ln\, J_0')$. In diesem Falle steigt die $S_x^{(t)}$-Kurve, oder mit andern Worten, pro Element der Gesamtheit ist im Laufe der Zeit eine stets anwachsende Anzahl dieser speziellen Elemente zu registrieren. Analogen Verlauf nimmt auch der reziproke Altersquotient, der uns das Verhältnis der Stärke eines höhern Jahrganges zum Neuzugang angibt. Zusammengefasst heisst das, dass die Bevölkerung stetig altert.

An dieser Stelle sei nun noch ein Vergleich mit dem geometrischen Wachstum gezogen. Wie schon mehrmals gesagt, gelten hier die Verhältnisse bei $t = -\infty$. Eine Zusammenstellung ergibt die folgenden Resultate:

$$Q_x^{(t)} = \frac{f(x_0)}{f(x)}\, e^{\delta(x-x_0)}$$

$$\frac{1}{Q_x^{(t)}} = \frac{f(x)}{f(x_0)}\, e^{-\delta(x-x_0)}$$

$$S_x^{(t)} = \frac{f(x)}{J_0'}\, e^{-\delta x} \qquad S_{x_0}^{(t)} = \frac{f(x_0)}{J_0'}\, e^{-\delta x_0}.$$

Alle 4 Verhältnisse sind zeitliche Konstante, was besonders bei dem letzten durch die Beobachtung keineswegs

bestätigt ist. Ebensowenig ist die Alterszusammensetzung konstant, wenn auch die Abweichungen für gewisse Alter gering sein können.

An dieser Stelle sei endlich noch eine Bemerkung über die *Sterberate* angeführt. Mit voller Absicht haben wir bis jetzt davon abgesehen, auch hierüber mathematische Formeln abzuleiten, einzig aus dem Grunde, unsere Betrachtungen nicht allzusehr durch eine Doppelspurigkeit zu belasten.

Ausgehend von der Zahl der aus dem Bestande $B\binom{x_2}{x_1}$ Ausscheidenden (der Einfachheit halber einzig durch Tod), die gegeben ist durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{f(x_0)} \int_{x_1}^{x_2} L_{x_0}^{(t-x+x_0)} \cdot f(x) \cdot \mu_x \cdot dx$$

kann durch eine zur Ableitung von § 3 analoge Umformung der angenähert logistische Verlauf nachgewiesen werden. Als Sterberate definiert man nun den Quotienten: Zahl der Sterbenden dividiert durch Bestand. (Würde man an Stelle der Sterbenden die überhaupt Ausscheidenden nehmen, so wäre dadurch die Ausscheiderate definiert.) Der Quotient der beiden Funktionen ist wieder logistischer Natur; wir begnügen uns deshalb, die Grenzlagen festzulegen. Ferner sei der Bestand ausgedehnt auf die gesamte Bevölkerung.

Im Beharrungszustande ist die Zahl der Sterbenden gegeben durch die Erneuerungszahl L (wenn L die Geburtenzahl angibt), während die Bevölkerung den Wert

$$B\binom{\infty}{0} = \frac{L}{f(0)} \int_0^{\infty} f(x) \cdot dx$$ annimmt.

Bezeichnet noch $T^{(t)}$ die Sterberate, so ist demnach

$$T^{(\infty)} = \frac{f(0)}{J_0} \tag{61}$$

Um die Ableitung bei $t = -\infty$ zu vereinfachen, approximieren wir dort den logistischen Verlauf durch den geometrischen. (Im Grenzfall $t = -\infty$ wird das Resultat genau.) Die Geburtenzahl sei dargestellt durch:

$$L_0^{(t)} = K \cdot e^{\delta t},$$

demnach wird $L_x^{(t)} = K \cdot e^{\delta(t-x)} \cdot \frac{f(x)}{f(0)}$

und $B\binom{\infty}{0} = \frac{K \cdot e^{\delta t}}{f(0)} \int_0^\infty e^{-\delta x} \cdot f(x) \cdot dx = \frac{K \cdot e^{\delta t}}{f(0)} J_0',$

analog dazu ist die Zahl der Sterbenden dargestellt durch:

$$\frac{K \cdot e^{\delta t}}{f(0)} \int_0^\infty e^{-\delta x} \cdot f(x) \cdot \mu_x \cdot dx = \frac{K \cdot e^{\delta t}}{f(0)} \cdot \bar{J}_0',$$

so dass: $$T^{(-\infty)} = \frac{\bar{J}_0'}{J_0'} \tag{62}$$

Es bliebe noch zu zeigen, dass die Sterberate steigende Tendenz hat. Wir verzichten jedoch auf einen umständlichen analytischen Beweis, sondern stützen uns auf die erwiesene Tatsache, dass mit zunehmender Zeit die relative Altersstruktur aller eine grosse Sterblichkeit aufweisender Jahrgänge zunimmt. Mit andern Worten, der Bestand altert, und daher wird auch die Sterberate zunehmen müssen.

Theoretisch liesse sich auch eine fallende Sterberate denken. Nimmt man an Stelle der ganzen Bevölkerung

bloss die Gesamtheit, die das Säuglingsalter und die frühesten Kindesalter umfasst, so ist gezeigt worden, dass deren relative Altersstruktur abnimmt. Der Anteil der jüngsten Elemente, die erwiesenermassen eine grössere Sterblichkeit aufweisen, nimmt mit der Zeit ab, und daher ist in diesem Teilbestand eine abnehmende Sterberate sehr wohl möglich.

Klar geht jedoch hervor, dass die Sterberate nicht als Masszahl zur Sterblichkeitsmessung ohne weiteres verwendet werden darf. Bei Voraussetzung einer konstanten Sterblichkeit ist die Sterberate keineswegs konstant, und infolgedessen kann durch sie die Lebensverbesserung nur unvollkommen dargestellt werden.

Kapitel III.

Anwendung auf Sozialversicherungskassen.

§ 1.

Die Kasse.

Im vorhergehenden Kapitel sind die Methoden entwickelt worden, die gestatten, die Veränderung der Bevölkerungszahl sowie ihrer Zusammensetzung mathematisch zu erfassen. In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse auf einen ganz bestimmten Fall angewandt werden.

In einer erwachsenen Bevölkerung, deren Zugang wir als logistische Funktion erkannt haben, wird die Altersversicherung eingeführt. Mit dem Eintritt im Alter x_0 beginnt die Prämienpflicht, die andauert bis zum Alter z. Von da an hat jedes Mitglied Anrecht auf eine lebenslängliche Altersrente, die wir der Einfachheit halber gleich *1* annehmen.

Bei der Berechnung der Prämien haben wir grundsätzlich zu unterscheiden zwischen Individualprämien und Durchschnittsprämien. Da ein einheitliches Eintrittsalter und Bezugsalter vorausgesetzt sind, werden zum vornherein alle Prämien einander gleich. Dabei ist selbstverständlich von einer Anfangsgeneration abgesehen worden.

Der Mitgliederbestand wird zusammengesetzt sein aus dem Bestand der Prämienzahler $B\binom{z}{x_0}$ und dem Bestand der Rentner $B\binom{\infty}{z}$. Die Grösse $L_z^{(t)}$ speziell gibt die Zahl der neu rentenberechtigt gewordenen Elemente an. Über die Alterszusammensetzung ist bereits im vorigen Kapitel das Nötige gesagt worden, und so werden wir uns auf die Bestimmung der Prämien beschränken können.

§ 2.

Die Finanzsysteme.

Von grundsätzlicher Bedeutung zur Prämienbestimmung wird die angewandte Deckungsmethode sein. Es sind vor allem 2 Systeme, die einander gegenüberstehen:

a) das Umlageverfahren;

b) die Methode der Anwartschaftsdeckung durch Prämien.

Die zweite Methode sei vorweggenommen. Als Prinzip gilt hier: Leistung gleich Gegenleistung. Alles, was der Versicherte im Laufe der Zeit an Prämien entrichtet, wird ihm in Form einer Altersrente zurückgegeben. Mit andern Worten ist der Barwert der Prämienzahlungen gleichzusetzen dem Barwert der Altersrente. Es bezeichne nun P diese Prämie, dann ist bei kontinuierlicher Zahlungsweise der Barwert der Prämienzahlungen gegeben durch:

$$P \cdot {}_{|z-x_0}\bar{a}_{x_0}.$$

Anderseits ist der Barwert der Rente dargestellt durch ${}_{z-x_0|}\bar{a}_{x_0}$, so dass sich P bestimmt zu:

$$P = \frac{{}_{z-x_0|}\bar{a}_{x_0}}{{}_{|z-x_0}\bar{a}_{x_0}} \tag{63}$$

Die Bestimmung der beiden Barwerte ist unabhängig von der Entwicklung der Bevölkerung, sie ist einzig Funktion der Zins- und Sterblichkeitsverhältnisse. Einleitend legten wir diese jedoch als konstant fest, ebenso wird ein fester Zinsfuss angenommen. Infolge dieser Annahmen wird auch die Prämie P als zeitlich konstant anzusehen sein.

Dieser streng versicherungstechnischen Berechnungsart steht nun das *Umlageverfahren* gegenüber. Einmal ist das *reine Umlageverfahren* zu nennen. Sämtliche Auslagen an Renten für die Alten werden umgelegt auf den Bestand der Prämienpflichtigen. Der Quotient Rentnerbestand dividiert durch Bestand der Prämienzahler gibt somit die Prämie für die Rente *1.* Der Rentnerbestand ist gegeben durch $B\binom{\infty}{z}$, die Gesamtheit der Prämienpflichtigen durch $B\binom{z}{x_0}$. Nennt man noch ${}_1P_{\Delta}^{(t)}$ die reine Umlageprämie, so ist:

$${}_1P_{\Delta}^{(t)} = \frac{B\binom{\infty}{z}}{B\binom{z}{x_0}} \tag{64}$$

Zähler und Nenner sind Funktionen der Zeit und haben in Annäherung logistischen Verlauf. Daher wird auch die Durchschnittsprämie keine zeitliche Konstante sein und wieder ungefähr einem steigenden logistischen Gesetze gehorchen müssen. Es gelingt leicht, das Maximum und das Minimum zu bestimmen.

Bei $t = \infty$ wird sein

$$B\left(\overset{\infty}{z}\right) = \frac{L}{f(x_0)} \int_{z}^{\infty} f(x) \cdot dx = \frac{L}{f(x_0)} J_0\left(\overset{\infty}{z}\right)$$

und $$B\left(\overset{z}{x_0}\right) = \frac{L}{f(x_0)} \int_{x_0}^{z} f(x) \cdot dx = \frac{L}{f(x_0)} J_0\left(\overset{z}{x_0}\right).$$

Daher ist $$ {}_1P_{\Delta}^{(\infty)} = \frac{J_0\left(\overset{\infty}{z}\right)}{J_0\left(\overset{z}{x_0}\right)} \qquad (64a)$$

Bei $t = -\infty$ kann wie folgt vorgegangen werden. Die Prämie ist der Quotient zweier Formen wie (32), wobei sich $1 + e^{-\delta(t-\tau)}$ wegkürzt. Beim Grenzübergang verschwinden die beiden Störungsfunktionen, und es bleibt:

$$ {}_1P_{\Delta}^{(-\infty)} = \frac{J_0'\left(\overset{\infty}{z}\right)}{J_0'\left(\overset{z}{x_0}\right)} \qquad (64b)$$

Auf eine zu Beginn gemachte Einschränkung muss hier noch aufmerksam gemacht werden. Jede Umlageprämie sollte zu Beginn den Wert *0* annehmen, denn bei der Eröffnung der Kasse sind noch keine Rentner vorhanden. Wir haben jedoch unsere Betrachtungen auf die Zeit der vollen Wirksamkeit beschränkt, und daher rührt die untere Grenze (64*b*).

Beim reinen Umlageverfahren sind alle Zinseinflüsse ausgeschaltet, und naturgemäss muss die so berechnete Prämie höher ausfallen als die Prämie des Anwartschaftsdeckungsverfahrens.

Anmerkung: Unter «Umlageprämie» verstehen wir den pro Kopf der Prämienzahler berechneten Beitrag an die gesamten Kosten der Versicherung.

Die Formel (64*b*) ergibt auch, wie bereits mehrmals erwähnt, die Verhältnisse beim geometrischen Wachstum. Würde demnach die Bevölkerung geometrisch anwachsen, so wäre die Umlageprämie vom Zeitpunkt der vollen Wirksamkeit hinweg konstant und von der Grösse, wie sie (64*b*) angibt. Wir hatten dieses für die Theorie so wichtige Resultat bereits in der Einleitung vorweggenommen. Hier erkennen wir aber, dass dieser Wert nur die *untere* Grenzlage darstellt, von wo aus ein stetiges Ansteigen bis zum Beharrungszustand erfolgt. Es liegt in der Natur der Sache, dass bei Eröffnung einer Kasse gerne dem Umlageverfahren der Vorzug gegeben wird. Immer muss aber im Laufe der Zeit die Umlageprämie die andere Prämie überholen. Man sollte nun glauben, dass sobald die Anfangsgeneration ausgestorben ist, stabile Verhältnisse eintreten sollten. Dies ist aber nur der Fall, wenn die Erneuerung in geometrischer Progression verläuft, eine Annahme, die wir ablehnten. Bei unsern Annahmen wächst die Umlageprämie stetig bis $t = \infty$. Diese Zunahme ist einzig durch die Umschichtung der Bevölkerung bedingt.

Als Abart des reinen Umlageverfahrens muss die *Umlage der neuen Rentenkapitalien* genannt werden. An Stelle der jährlichen Rentenauslagen werden die Barwerte aller neuen Renten für einen übergetretenen Jahrgang auf den Bestand der Prämienzahler umgelegt.

Dieser Barwert nimmt nun den Wert an $L_z^{(t)} \cdot \bar{a}_z$, wo $\bar{a}_z$ der Barwert der Altersrente ist und $L_z^{(t)}$ die Zahl der neu rentenberechtigt gewordenen Elemente angibt. Bezeichnet noch ${}_2P_{\Delta}^{(t)}$ diese Prämie, so ist

$$ {}_2P_{\Delta}^{(t)} = \frac{L_z^{(t)} \cdot \bar{a}_z}{B\binom{z}{x_0}} \tag{65} $$

${}_2P_{\Delta}^{(t)}$ wird ebenfalls einen logistischen Verlauf nehmen. Von

$$ {}_2P_{\Delta}^{(-\infty)} = \frac{e^{-\delta z} \cdot f(z)}{J_0'\left(\frac{z}{x_0}\right)} \bar{\mathfrak{a}}_z \qquad (65a) $$

steigt die Prämie an bis

$$ {}_2P_{\Delta}^{(\infty)} = \frac{f(z)}{J_0\left(\frac{z}{x_0}\right)} \bar{\mathfrak{a}}_z \qquad (65b) $$

Die steigende Tendenz geht ebenfalls aus den Ergebnissen der relativen Altersstruktur hervor, denn abgesehen vom Faktor $\bar{\mathfrak{a}}_z$ ist (65) nichts anderes als die relative Altersstruktur, bezogen auf den Bestand $B\left(\frac{z}{x_0}\right)$. Dabei wird z den Bedingungen (60) zu genügen haben.

Es ist ersichtlich, dass ${}_2P_{\Delta}^{(t)}$ kleiner sein wird als ${}_1P_{\Delta}^{(t)}$; ferner kann bezüglich des Anfangswertes die gleiche Bemerkung gemacht werden wie vorher.

Eine letzte Art endlich ist die Umlage der *neuen Rentenkapitalien auf die Neueingetretenen.* Für ein neueingetretenes Mitglied ist demnach die Prämie zeitlebens konstant. Der Barwert der Leistungen wird gegeben sein durch:

$$ L_z^{(t)} \cdot \bar{\mathfrak{a}}_z, $$

denen der Barwert der Prämienzahlungen

$$ {}_3P_{\Delta}^{(t)} \cdot L_{x_0}^{(t)} \cdot {}_{|z-x_0}\bar{\mathfrak{a}}_{x_0} $$

gegenübersteht. Die Prämie ${}_3P_{\Delta}^{(t)}$ wird daher:

$$ {}_3P_{\Delta}^{(t)} = \frac{L_z^{(t)}}{L_{x_0}^{(t)}} \cdot \frac{\bar{\mathfrak{a}}_z}{{}_{|z-x_0}\bar{\mathfrak{a}}_{x_0}} \qquad (66) $$

Der erste Faktor ist nichts anderes als der reziproke Altersquotient. Wir erkannten aber den rein logistischen Verlauf dieser Grösse und können leicht die beiden Extremwerte aufstellen.

$$ {}_3P_{\Delta}^{(-\infty)} = \frac{f(z) \cdot e^{-\delta(z-x_0)}}{f(x_0)} \frac{\bar{a}_z}{{}_{|z-x_0}\bar{a}_{x_0}} \qquad (66a) $$

$$ {}_3P_{\Delta}^{(\infty)} = \frac{f(z)}{f(x_0)} \frac{\bar{a}_z}{{}_{|z-x_0}\bar{a}_{x_0}} \qquad (66b) $$

Über die Zweckmässigkeit dieses Systems verweisen wir auf das folgende Kapitel.

Man überzeugt sich leicht, dass die folgende Beziehung besteht:

$$ \frac{f(z)}{f(x_0)} \cdot \bar{a}_z \, v^{z-x_0} = {}_{z-x_0|}\bar{a}_{x_0}, $$

also ergibt sich bei Vergleich von (63) und (66*b*) für den Beharrungszustand die Gleichung:

$$ P = {}_3P_{\Delta} \cdot v^{z-x_0}. $$

Vor Erreichen des Beharrungszustandes gilt allgemein:

$$ {}_3P_{\Delta}^{(t)} > {}_1P_{\Delta}^{(t)} > {}_2P_{\Delta}^{(t)} > P \qquad (67) $$

Kapitel IV.

Schematisches Beispiel.

§ 1.

Die Grundlagen. Die Zugangsfunktion. Der Stand der Bevölkerung. Die Alterszusammensetzung.

Nachdem wir in den frühern Kapiteln die Vorgänge bei der Entwicklung einer Bevölkerung mathematisch erfasst haben, werden wir anhand eines schematischen Beispieles auch die zahlenmässigen Zusammenhänge zur Darstellung bringen.

In Anlehnung an die Berechnungen von *Yule* nehmen wir in der Zugangsfunktion $\alpha = 50$ an, d. h. $\delta = 0.02$.

Fernerhin soll $L_{x_0}^{(t)}$ gegen die obere Grenze 10 000 hin tendieren. Um die Berechnungen zu vereinfachen, verschieben wir den Zeitnullpunkt um $\beta - x_0$ Zeiteinheiten (Einheit = 1 Jahr). Somit wird die Zugangsfunktion gegeben sein durch den Ausdruck, wenn noch $x_0 = 20$ angenommen ist:

$$L_{20}^{(t)} = \frac{10\,000}{1 + e^{-0.02\,(t-20)}} \tag{68}$$

Zur Berechnung der Anzahl der x-Jährigen in irgendeinem Zeitpunkt t bedürfen wir der Überlebenswahrscheinlichkeiten. Wir haben unseren Berechnungen die Tafel S. M. 1920/21, 4 % (29*), zugrunde gelegt. Die genannte Tafel ist für die in Betracht fallenden Alter nach Makeham ausgeglichen.

Die Berechnungsergebnisse werden nachstehend nur auszugsweise mitgeteilt.

Anhand der Tabelle 1 und der graphischen Darstellung 2 können wir uns über den zeitlichen Verlauf der $L_x^{(t)}$ orientieren.

Tabelle 1. Anzahl der x-jährigen Elemente zur Zeit t.

x \ t	— 100	— 50	0	50	100	∞
20	832	1978	4013	6457	8320	10000
30	662	1609	3393	5733	7682	9576
40	516	1278	2792	4953	6923	9009
50	385	968	2183	4058	5934	8117
60	258	656	1523	2962	4539	6578
65	194	498	1171	2326	3652	5466
70	133	343	815	1654	2661	4122
80	37	95	231	488	824	1377
90	2	6	14	31	54	99

Aus der graphischen Darstellung 2 ist ohne weiteres zu erkennen, dass die Wendepunkte der einzelnen Kurven je um die betreffende Altersdifferenz verschoben sind.

Durch entsprechende Summation erhalten wir leicht die Bestände der Rentner, Prämienzahler sowie auch die gesamte erwachsene Bevölkerung. In der folgenden Tabelle sind die Werte für die Stichtermine dargestellt. Ebenfalls gibt die Darstellung 3 den Verlauf wieder.

Tabelle 2. Entwicklung der Bestände der Rentner $B\binom{\infty}{65}$, Prämienzahler $B\binom{64}{20}$ und der gesamten erwachsenen Bevölkerung $B\binom{\infty}{20}$. Annahme $z = 65$.

B	−100	−50	0	50	100	∞
$B\binom{\infty}{20}$	24 348	60 096	131 065	223 678	328 441	443 450
$B\binom{64}{20}$	22 480	55 278	119 571	200 224	290 408	383 687
$B\binom{\infty}{65}$	1 868	4 818	11 494	23 454	38 033	59 763

Die Zeichnung lässt erkennen, dass die drei Bestände mit grösserer oder geringerer Genauigkeit eine logistische Kurve verfolgen. Die Genauigkeit nimmt zu, je weniger Jahrgänge die Gesamtheit umfasst. Die Rechnung deckt sich mit den mathematischen Ergebnissen in Kapitel II.

Die bisherigen Angaben geben wohl den zahlenmässigen Umfang der Bestände wieder, nicht aber den innern Aufbau. Zur Messung der Altersstruktur haben wir seinerzeit den Altersquotienten und die relative Altersstruktur eingeführt. In unsern Berechnungen haben wir diese Grössen immer auf die erwachsene Bevölkerung ($x \geqq 20$) bezogen, und wir geben in der nachfolgenden Tabelle 3 die Werte wieder.

Tabelle 3. a) Der Altersquotient.

x \ t	$-\infty$	-100	-50	0	50	100	∞
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
25	1.128	1.119	1.106	1.085	1.059	1.038	1.020
30	1.276	1.256	1.229	1.183	1.126	1.083	1.044
35	1.448	1.417	1.375	1.298	1.206	1.136	1.073
40	1.656	1.611	1.548	1.437	1.304	1.202	1.110
45	1.912	1.850	1.763	1.611	1.425	1.287	1.160
50	2.225	2.159	2.043	1.838	1.591	1.402	1.232
55	2.703	2.590	2.433	2.156	1.825	1.571	1.342
60	3.384	3.229	3.015	2.635	2.180	1.833	1.520
65	4.502	4.278	3.972	3.427	2.776	2.278	1.828
70	6.597	6.249	5.767	4.924	3.904	3.127	2.427
75	11.23	10.61	9.744	8.223	6.387	4.991	3.731
80	24.11	22.72	20.82	17.37	13.23	10.10	7.246

Aus der Tabelle ist zu ersehen, wie im Laufe der Zeit auf ein Element eines bestimmten Jahrgangs

b) Der reziproke Altersquotient.

x \ t	$-\infty$	-100	-50	0	50	100	∞
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
25	0.885	0.894	0.904	0.922	0.945	0.963	0.980
30	0.784	0.796	0.813	0.846	0.888	0.923	0.958
35	0.690	0.706	0.728	0.770	0.829	0.880	0.932
40	0.604	0.621	0.646	0.696	0.767	0.832	0.901
45	0.523	0.540	0.567	0.621	0.702	0.777	0.862
50	0.445	0.461	0.489	0.544	0.627	0.713	0.812
55	0.370	0.386	0.411	0.464	0.548	0.637	0.745
60	0.296	0.310	0.332	0.380	0.459	0.546	0.658
65	0.222	0.234	0.252	0.292	0.360	0.439	0.547
70	0.152	0.160	0.173	0.203	0.256	0.320	0.412
75	0.089	0.094	0.103	0.122	0.157	0.200	0.268
80	0.041	0.044	0.048	0.058	0.076	0.099	0.138

immer weniger neue Mitglieder eintreten. Das Fallen ist um so ausgeprägter, je ältere Jahrgänge betrachtet werden.

Die Rechnungsergebnisse decken sich mit der früher entwickelten Theorie: Auf ein Element des Zugangs kommt eine stets zunehmende Anzahl eines höhern Jahrgangs zu stehen. Kommen beispielsweise beim geometrischen Wachstum 0.222 65-Jährige auf ein neueingetretenes Mitglied, so steigt diese Zahl auf 0.547 im Beharrungszustand, also auf mehr als das Doppelte.

c) Die relative Altersstruktur in $^0/_0$: $100\, S_x^{(t)}$.

x \ t	$-\infty$	-100	-50	0	50	100	∞
20	3.578	3.416	3.291	3.062	2.887	2.533	2.255
25	3.172	3.053	2.975	2.822	2.727	2.439	2.210
30	2.805	2.719	2.677	2.589	2.563	2.339	2.159
35	2.470	2.410	2.395	2.359	2.393	2.230	2.101
40	2.161	2.121	2.127	2.130	2.214	2.108	2.031
43	1.980	1.952	1.970	1.994	2.101	2.027	1.982
45	1.871	1.846	1.867	1.901	2.025	1.969	1.944
50	1.594	1.581	1.611	1.666	1.814	1.807	1.830
55	1.324	1.319	1.353	1.420	1.582	1.613	1.680
60	1.057	1.058	1.092	1.162	1.324	1.382	1.483
65	0.795	0.798	0.829	0.893	1.040	1.112	1.233
70	0.542	0.547	0.571	0.622	0.739	0.810	0.929
75	0.319	0.322	0.338	0.372	0.452	0.508	0.604
80	0.148	0.150	0.158	0.176	0.218	0.251	0.310

Die Auswertung der Bedingung (60) ergibt für x den Wert $x = 43.08$. Bis zu diesem Alter sinkt die relative Altersstruktur, um dann für die höhern Alter wieder anzusteigen. Die Rechnungsergebnisse ergeben aber auch, dass für die Alter $x = 20$ bis $x = 50$ die $S_x^{(t)}$-

Kurve nicht rein logistisch ist, ebenso weist $S_{43}^{(t)}$ nicht eine konstante Höhe auf, obschon die Tendenz hierzu unverkennbar ist. Der Grund liegt in der nicht rein logistischen Natur der Wachstumskurve der Bevölkerung.

Mit grosser Deutlichkeit geht jedoch die *fallende* Tendenz der Zugangsrate hervor, ein Resultat, das sich mit den Ergebnissen in der früher genannten Abhandlung von *Yule* deckt. Dem gegenüber steht die stark ansteigende $S_{65}^{(t)}$-Kurve, die mit den Kurven der andern Alter auf eine starke Umschichtung im Altersaufbau hinweist.

Um diese Umschichtung besser zu erkennen, haben wir die in Tabelle 1 mitgeteilten Zahlwerte auf die *Anfangszahl 10 000* gebracht und geben die Resultate in der nachstehenden Tabelle wieder. Die Darstellung 5 zeigt in deutlicher Weise, wie gegen den Beharrungszustand hin die ältern Altersklassen sehr stark vertreten sind.

Tabelle 4. Schematische Altersverteilung, Personen.

x \ t	$-\infty$	-100	-50	0	50	100	∞
20	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
30	7840	7958	8135	8455	8880	9234	9576
40	6040	6207	6462	6958	7672	8321	9009
50	4445	4626	4894	5440	6286	7133	8117
60	2956	3096	3317	3795	4588	5456	6578
70	1516	1600	1734	2031	2562	3199	4122
80	415	440	480	576	756	990	1377
90	24	25	30	35	48	65	99

§ 2.

Die Prämien.

Auf Grund unserer im 3. Kapitel entwickelten Formeln können die Prämien für die verschiedenen Fi-

nanzsysteme ermittelt werden. Als Bezugsalter haben wir $z = 65$ angenommen, die Prämienpflicht beginnt beim Eintritt im Alter $x_0 = 20$. Die Rente betrage Fr. 100.

In einer Tabelle stellen wir die verschiedenen Prämien einander gegenüber.

Tabelle 5. Prämien, berechnet nach:

P : Anwartschaftsdeckung durch Prämien.

${}_1P_{\Delta}$: Reines Umlageverfahren.

${}_2P_{\Delta}$: Umlage der neuen Rentenkapitalien auf den Bestand der Prämienzahler.

${}_3P_{\Delta}$: Umlage der neuen Rentenkapitalien auf die Neueingetretenen.

P \ t	$-\infty$	-100	-50	0	50	100	∞
P	4.086	4.086	4.086	4.086	4.086	4.086	4.086
${}_1P_{\Delta}$	7.611	8.310	8.716	9.613	11.714	13.096	15.576
${}_2P_{\Delta}$	7.335	7.378	7.685	8.350	9.911	10.729	12.156
${}_3P_{\Delta}$	9.701	10.226	11.012	12.760	15.732	19.184	23.904

Wie zu erwarten war, ist die nach der Methode der Anwartschaftsdeckung durch Prämien bestimmte jährliche Zahlung die niedrigste, weil die Zinseinflüsse am grössten sind. Die einbezahlten Prämien liegen an Zins, bis die gleiche Generation zum Bezug kommt.

Unter den übrigen nimmt ${}_3P_{\Delta}$ eine Sonderstellung ein, sie überholt schon von Anfang an die Durchschnittsprämie beträchtlich. Bei der Umlage der Rentenkapitalien auf den Neuzugang sind wohl auch Zinseinflüsse vorhanden, aber sie sind entgegengesetzter Natur. Der Bestand der Rentner kann längst ausgestorben sein, aber die Prämien fliessen immer noch. Diese Tatsache

ist gleichbedeutend mit einer Amortisation, die Barwerte der Altersrente werden von den Prämienpflichtigen während ihrer Aktivzeit getilgt, und daher lässt sich das überaus starke Anwachsen erklären. Für die Praxis schliesst sich dieses Verfahren natürlich von selbst aus.

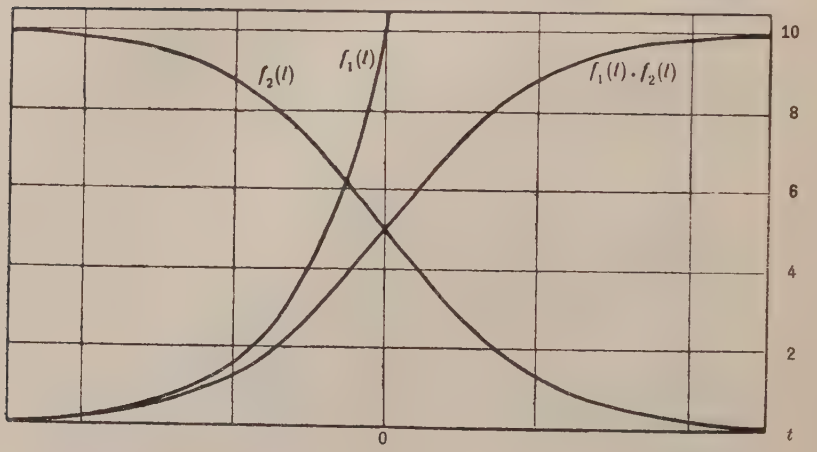
Auch die reine Umlageprämie weist eine rapide Steigerung auf: von 7.611 beim geometrischen Wachstum steigt sie auf 15.576 im Beharrungszustand, also auf mehr als das Doppelte.

In einem *Überblick* über die Untersuchungen wollen wir kurz die hauptsächlichsten Ergebnisse zusammenstellen: Setzt man eine logistische Zugangsfunktion voraus, so lässt sich das Wachstumsgesetz der daraus resultierenden Bevölkerung in Annäherung ebenfalls durch eine logistische Funktion darstellen. In der Alterszusammensetzung erkennt man die stets zunehmende Alterung, die relative Altersstruktur als entsprechende Masszahl ist logistischer Natur. Speziell ist es möglich, einen Jahrgang mathematisch zu bestimmen, dessen relative Altersstruktur bestrebt ist, auf konstanter Höhe zu verharren. Fernerhin kann gezeigt werden, dass die Geburtenrate durch eine angenäherte logistische Kurve approximiert werden kann.

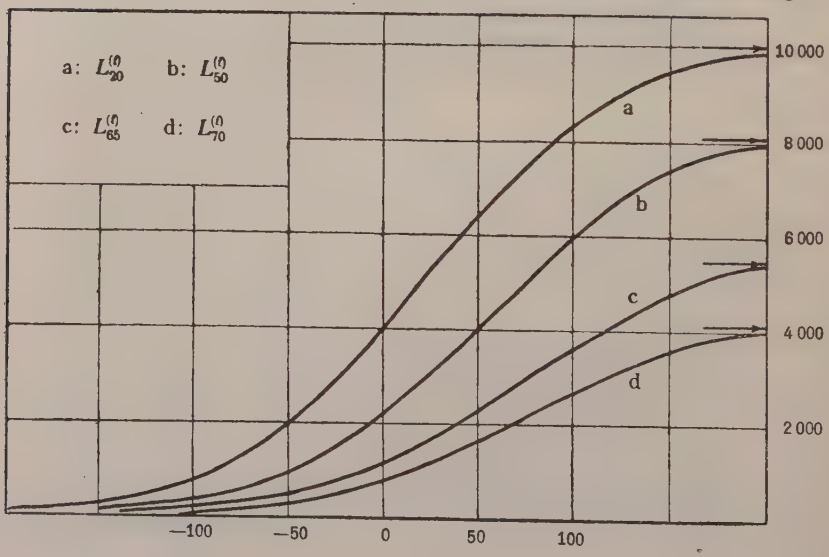
Als den für die Praxis wertvollsten Teil unserer Untersuchungen betrachten wir die Ergebnisse über die Alterszusammensetzung der Bevölkerung. Wie wichtig die Prüfung derartiger Zusammenhänge für die Sozialversicherung ist, erkennen wir aus dem Motivenbericht des eidgenössischen Volkswirtschaftsdepartements vom August 1928, in welchem mit Recht bei der Finanzierung der Alters- und Hinterbliebenenversicherung der zu erwartenden Umschichtung in der schweizerischen Bevölkerung gebührend Rechnung getragen wurde.

Graphische Darstellungen.

Verlauf der logistischen Funktion. Darstellung 1.

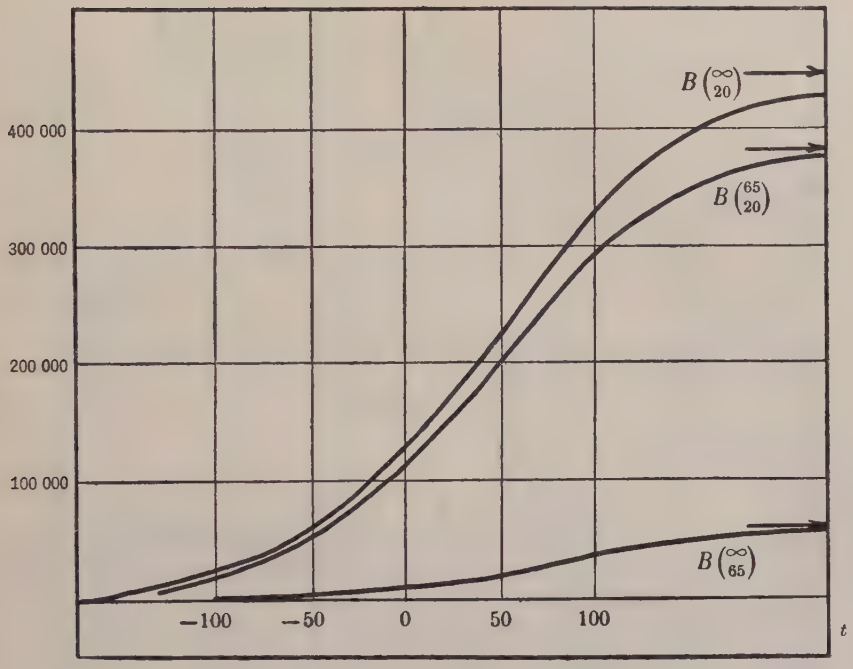


Zahl der x-Jährigen. Darstellung 2.



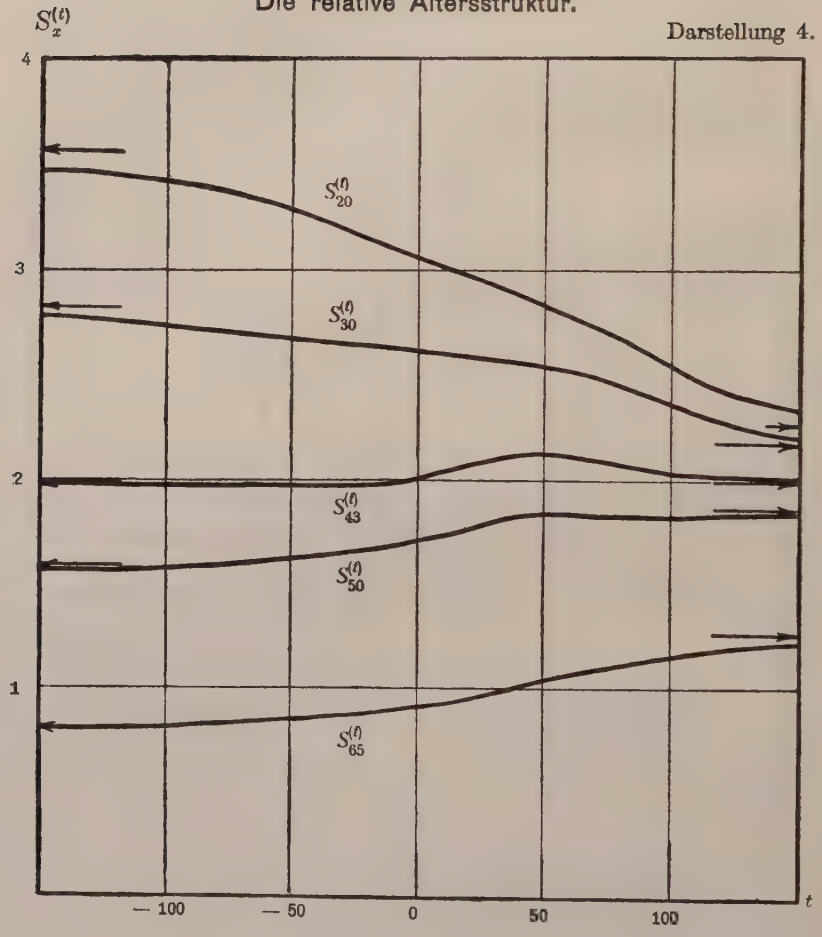
Entwicklung der Bestände.

Darstellung 3.



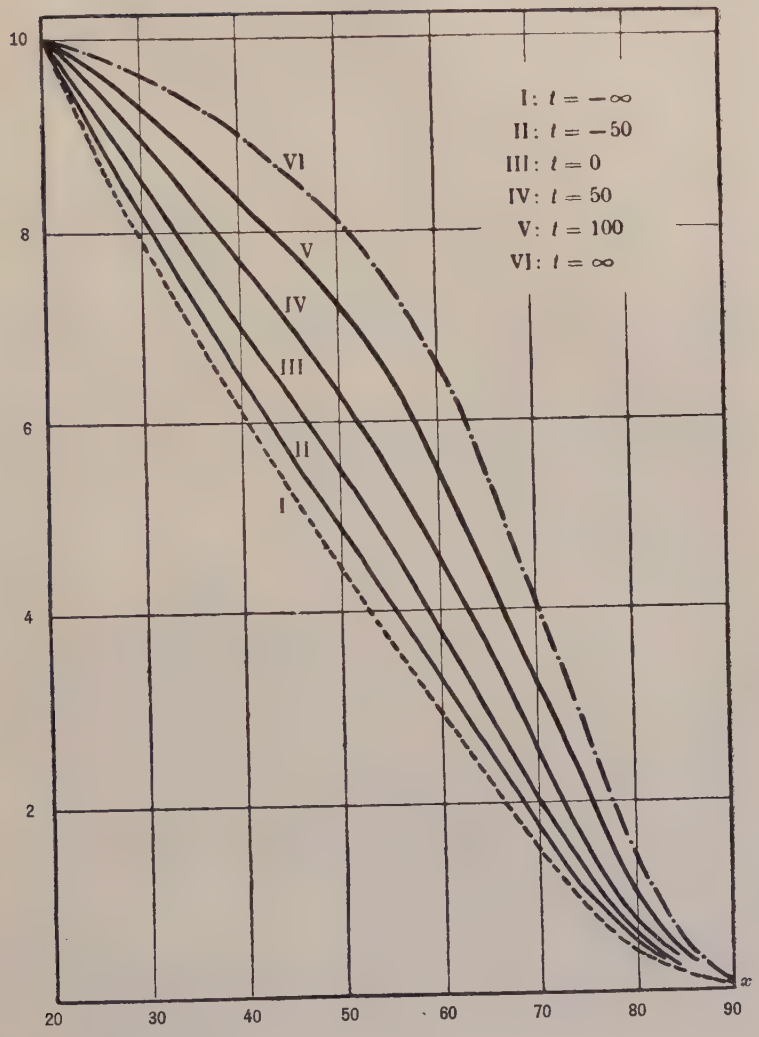
Die relative Altersstruktur.

Darstellung 4.



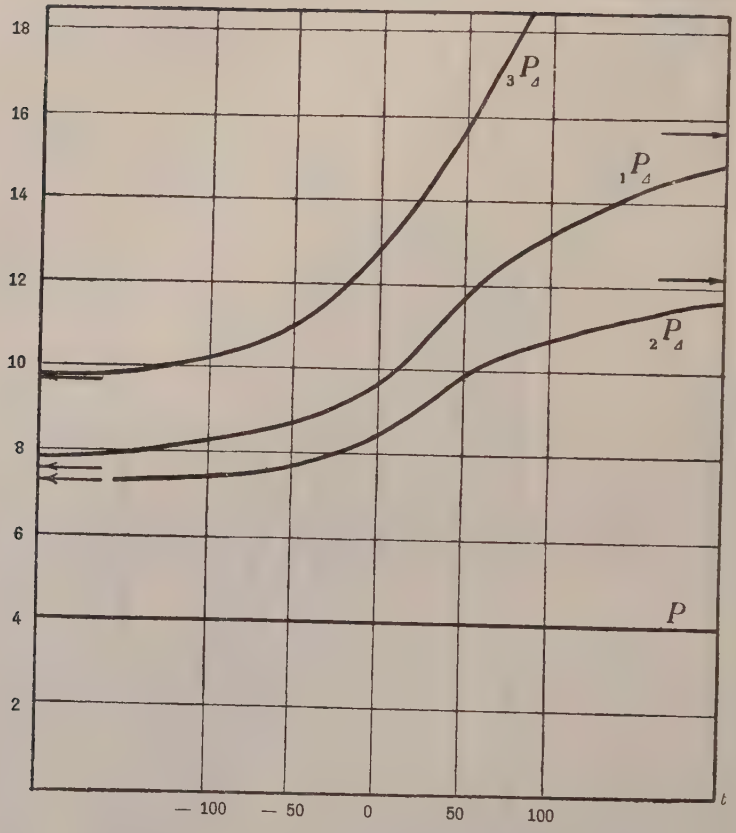
Schematische Altersverteilung.

Darstellung 5.



Prämien.

Darstellung 6.



Literaturnachweis.

1. *Euler:* Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.
   Opera omnia, Series prima, Volumen VII, 1923.
2. *Süssmilch:* Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen. 1741.
3. *Malthus:* An essay on the principle of population. Anonym. London 1798.
4. *Gumbel:* Die Berechnung des Bevölkerungsstandes durch Interpolation.
   Ergänzungshefte zu dem Archiv für soziale Hygiene und Demographie. Leipzig 1916.
5. *Schromm:* Methoden der Bemessung der Prämien und der Prämienreserven in der öffentlichen Versicherung; insbesondere Voraussetzungen für die Verwendung von Durchschnittsprämien.
   Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des 6. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, Wien 1909.
6. *Bortkiewicz:* Die Deckungsmethoden in der Sozialversicherung.
   Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des 6. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, Wien 1909.
7. *Kaan:* Die Finanzsysteme in der öffentlichen und in der privaten Versicherung.
   Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, 5. Band, Wien 1910.
8. *Marchand:* A propos de l'introduction des assurances sociales en Suisse.
   Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 16, 1921.
9. *Loewy:* Versicherungsmathematik. Berlin 1924.
10. *Quetelet:* Sur l'homme et le développement de ses facultés. Essai de physique sociale. Bruxelles 1835.
11. *Verhulst:* Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement.
    Correspondance mathématique et physique publiée par A. Quetelet. 1838.

Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population.

Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 1845.

Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Ibid. 1847.

12. *Robertson:* On the normal rate of growth of an individual, and its biochemical significance.

Archiv für Entwicklungsmechanik, 25. Band, 1908.

13. *Reed:* The dynamics of a fluctuating growth rate. Proc. of the Nat. Acad. of Sciences, Volume 6, Number 7, 1920.

14. *Pearl & Reed:* On the rate of growth of the population of the United States of America since 1790 and its mathematical representation.

Proc. of the Nat. Acad. of Sciences, Vol. 6, 1920.

15. *Du Pasquier:* Esquisse d'une nouvelle théorie de la population.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 63. Jahrgang, 1918.

16. *Krummeich:* Contribution à l'étude du mouvement de la population.

Journal de la société de statistique de Paris, 68e année, 1927.

17. *Yule:* The growth of population and the factors which control it.

Journal of the Royal Statistical Society, Vol. LXXXVIII, part I, 1925.

18. Journal of the Royal Statistical Society, Vol. LXXXVIII, part I, 1925.

19. *Gumbel:* Ein Versuch eines mathematischen «Gesetzes» der Bevölkerungszunahme

Deutsches Statistisches Zentralblatt 1921.

20. *Friedli: a)* L'accroissement de la population suisse et les assurances sociales.

Rapports sur l'assurance sociale, Heft IV des versicherungswissenschaftlichen Kongresses in London, 1927.

b) Bevölkerungsstatistische Grundlagen zur Alters- und Hinterlassenenversicherung in der Schweiz. Bern 1928.

21. *Moser:* Vorlesung über Erneuerungsfunktion und Integralgleichungen. S. S. 1926 und S. S. 1928.

22. *Moser:* Über Gleichungen für eine sich erneuernde Gesellschaft, mit Anwendung auf Sozialversicherungskassen.
Verhandlungen der schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen 1921.

23. *Moser:* Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit.
Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 21, 1926.

24. *Pearl & Reed:* On the summation of logistic curves.
Journal of the Royal Statistical Society, Vol. XC, part IV, 1927.

25. *Nielsen:* Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig 1906.

26. *Bieri:* Über die unvollständige Gammafunktion. Diss. Bern 1912.

27. *Friedli:* Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen.
Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 13, 1918.

28. *Klein:* Vorlesung über die hypergeometrische Funktion. Göttingen 1894.

29. Bericht des eidgenössischen Versicherungsamtes: Die privaten Versicherungsunternehmungen in der Schweiz im Jahre 1925. Bern 1927.

Lebenslauf.

Geboren am 23. August 1905 in Bern, trat ich im Frühling 1912 in die unterste Klasse der städtischen Primarschule ein. Nach 4 Jahren erfolgte die Aufnahme in das städtische Progymnasium und nach weitern 4 Jahren der Übertritt in die Realabteilung des Gymnasiums. Im Herbst 1924 bestand ich die Realmaturität und immatrikulierte mich hierauf an der hiesigen Universität, um versicherungsmathematischen und mathematischen Studien obzuliegen.

Bern, den 29. Oktober 1928.

Ernst Zwinggi.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1
Die Wachstumsgesetze 3
Die Problemstellung 10

Kapitel I. Allgemeine Beziehungen.

§ 1. Das Wachstum einer Personengesamtheit. Die Zugangsfunktion. Die resultierende Gesamtheit. Einschränkungen 11
§ 2. Die Alterszusammensetzung. Die relative Altersstruktur. Der Altersquotient. Die Zugangsrate 16

Kapitel II. Die Bevölkerung auf Grund der logistischen Zugangsfunktion.

§ 1. Die Zugangsfunktion 17
§ 2. Summe und Differenz, sowie Quotient und Produkt von logistischen Funktionen 21
§ 3. Die Bevölkerung 24
§ 4. Einführung der unvollständigen Gammafunktionen 29
§ 5. Zusammenhang mit den hypergeometrischen Reihen. 35
§ 6. Die Störungsfunktion 39
§ 7. Der Altersquotient. Die relative Altersstruktur. Die Zugangsrate 41

Kapitel III. Anwendung auf Sozialversicherungskassen.

§ 1. Die Kasse 50
§ 2. Die Finanzsysteme 51

Kapitel IV. Schematisches Beispiel.

§ 1. Die Grundlagen. Die Zugangsfunktion. Der Stand der Bevölkerung. Die Alterszusammensetzung . . . 56
§ 2. Die Prämien 61
Graphische Darstellungen 64
Literaturnachweis 69